

École doctorale n°432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

**Doctorat ParisTech**

**T H È S E**

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École nationale supérieure des Mines de Paris**

**Spécialité « Mécanique »**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Duy Khanh TRINH**

le 18 novembre 2011

**Méthodes d'homogénéisation d'ordre supérieur pour les  
matériaux architecturés**

Directeur de thèse : **Samuel FOREST**

**Jury**

**M. Jia LI**, Professeur, Université Paris 13

**M. Serge KRUCH**, Maître de recherche, ONERA

**Mme. Hélène DUMONTET**, Professeur, Université Paris 6

**M. Rémy DENDIEVEL**, Professeur, INP Grenoble

**M. Olivier BOUAZIZ**, Docteur, ARCELOR RESEARCH

**M. Samuel FOREST**, Directeur de recherche, CNRS, Mines ParisTech

Rapporteur

Rapporteur

Président

Examineur

Examineur

Examineur

**MINES ParisTech**  
**Centre des Matériaux P.M.FOURT**

10 rue Henri Desbruères  
91000 EVRY Cedex

**T  
H  
È  
S  
E**



## Remerciements

Après trois ans, j'ai un grand plaisir d'écrire cette dernière partie de ma thèse. Ces remerciements sont indispensables de ma part parce qu'en arrivant à la soutenance, j'ai passé un long trajet scientifique et ce dernier est impossible à terminer sans les aides des genres alentours.

Pour le commencement, je voudrais aborder mon directeur de thèse, Samuel, qui avec son grand compétence scientifique m'a aidé beaucoup en donnant la bonne direction de recherche, des conseils très nécessaires pour que je puisse surmonter les obstacles qui sont toujours apparus dans toutes les étapes de mes travaux. Cette thèse ne peut pas être finie sans les aides de sa part. Son rôle est très important, mais il vaut mieux que je ne dit pas tout car Samuel, avec son caractère modeste, il n'aime pas de parler de lui comme un héros bien qu'il le soit vraiment dans la réalité. Je lui donne ainsi tous mes remerciements et mes admirations. Je laisse également ses futurs doctorants à découvrir ses caractères et ses compétences bien sûr avec toutes mes recommandations.

Une personne très importante que je ne peux pas oublier dans cette partie, c'est Madame le professeur Dumontet, qui avec les autres gentils professeurs de Paris 6, m'a aidé beaucoup dans le changement du domaine génie civil à celui de mécanique. Je suis très heureux d'avoir lui montré mes travaux de thèse qui contiennent mes avancements scientifiques lors de ma soutenance où elle a accepté de devenir examinateur.

La soutenance de ma thèse s'est bien passée grâce à grands efforts de mes rapporteurs Mr Professeur Li de Paris 13 et Mr Kruch d'ONERA R&D. Il est impossible de ne pas en parler. Les conseils et aussi les questions des rapporteurs, posés dans mes rapports et dans ma soutenance m'ont aidés beaucoup à remplir les vides dans ma thèse. Les grandes corrections, réalisées dans cette thèse, viennent principalement de leurs travaux. Je souhaite d'avoir la chance de travailler avec eux dans le futur.

Pendant toute ma thèse, l'accompagnement de deux autres examinateurs, Mr Bouaziz et Mr Dendievel sont très importants. Ils suivent de façon très proche et très attentive ma thèse via les réunions d'avancement et me donnent des conseils très importants ainsi que nous posent de très bonnes questions. Le support financier du groupe Arcelor Mittal dont le représentant est Mr Bouaziz est très important à la réussite commune du projet MAM et aussi à ma thèse. Je voudrais dire aussi un grand remerciement à Mr Dendievel de passer un long trajet de Lyon à Paris afin d'assister à ma soutenance.

C'est une grande faute si je n'aborde pas les genres au CdM. Avec beaucoup d'échanges pendant trois ans, ils me manquent beaucoup en quittant du CdM. Je veux leur envoyer un gros bisous avec tous les meilleurs souhaits, en particulier, aux amis dans le bureau C133 qui me traitent toujours avec leur générosité et leur franchise.

Ces dernières lignes sont destinées à ma famille qui me supporte dès le début de ma thèse et en particulier à ma femme, qui est toujours à côté de moi lors des périodes les plus stressées. Sans leur encouragement, je ne peux pas aller tellement loin. Je prends le grade docteur de l'école des Mines comme un cadeau spirituel pour eux.

Il y a beaucoup de personnes que je me suis croisé pendant trois derniers ans, qui m'encouragent sur le premier trajet scientifique. Pour ceux qui ne sont pas abordés ici, je veux envoyer les remerciements et de bonnes souhaits au fond de mon cœur.

Paris, le 10 janvier 2012





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte industriel . . . . .	1
1.2	Contexte scientifique . . . . .	2
1.3	Notations . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Premiers éléments de mécanique des milieux continus généralisés et d'homogénéisation</b>	<b>5</b>
2.1	Quelques éléments sur les milieux continus généralisés . . . . .	6
2.1.1	Milieu de Cosserat . . . . .	6
2.1.2	Milieu du second-gradient . . . . .	7
2.1.3	Milieu micromorphe . . . . .	8
2.2	Calcul analytique . . . . .	9
2.2.1	Approche par le milieu de Cosserat/milieu micropolaire . . . . .	9
2.2.2	Approche par la théorie du second-gradient . . . . .	16
2.2.3	Approche par le milieu micromorphe . . . . .	19
2.3	Généralités sur l'homogénéisation . . . . .	25
2.3.1	VER et propriétés effectives . . . . .	25
2.3.2	Conditions aux limites et moyenne des champs locaux . . . . .	27
2.3.3	Homogénéisation d'ordre supérieur et conditions aux limites non-homogènes . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Eléments bibliographiques</b>	<b>29</b>
3.1	Modélisation des matériaux hétérogènes par le modèle de Cosserat . . . . .	30
3.1.1	Cinématique . . . . .	30
3.1.2	Identification d'un milieu de substitution de Cosserat au niveau global . . . . .	31
3.1.3	Exemple d'homogénéisation d'un matériau multi-couches . . . . .	32
3.2	Homogénéiser des matériaux hétérogènes en utilisant le modèle du second gradient comme MHGE . . . . .	33
3.2.1	Cinématique . . . . .	34
3.2.2	Exemples . . . . .	36
3.2.3	Effets de taille . . . . .	37
3.3	La taille du VER dans l'homogénéisation au second ordre . . . . .	39
3.3.1	Le cas de VER homogène . . . . .	40
3.3.2	Le cas d'un VER hétérogène . . . . .	41
3.3.3	Problème de cisaillement aux bords . . . . .	42
3.4	Application du modèle à couples de contraintes pour homogénéiser un composite biphasé . . . . .	48
3.4.1	Premiers essais dans (Ostoja-Starzewski et al., 1999a) . . . . .	48
3.4.2	Les améliorations et développements dans (Bouyge et al., 2001a) . . . . .	53

3.5	Stratégie de modélisation multi-échelles numérique pour le milieu micromorphe . . . . .	58
3.5.1	Cinématique . . . . .	58
3.5.2	Définition des ddls à partir de la microstructure . . . . .	59
3.6	Méthode de correction des modules homogénéisés d'ordre supérieur . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Modèle micromorphe de composites élastiques</b>	<b>65</b>
4.1	Homogénéisation au second ordre . . . . .	67
4.1.1	Modèle du second gradient et la méthode des développements asymptotiques multi-échelles . . . . .	68
4.1.2	Les exigences pour l'homogénéisation au second ordre . . . . .	68
4.1.3	Polynôme quadratique proposé . . . . .	69
4.1.4	Le lien entre l'approche à couple de contraintes et l'approche de Cosserat . . . . .	72
4.1.5	Les limitations des approches actuelles . . . . .	72
4.2	Approche micromorphe . . . . .	73
4.2.1	La définition des degrés de liberté micromorphes . . . . .	74
4.2.2	Les mesures de déformation d'ordre supérieur . . . . .	75
4.2.3	Polynôme proposé comme condition aux limites . . . . .	75
4.3	Le volume élémentaire représentatif pour des conditions aux limites non-homogènes . . . . .	77
4.3.1	La convergence de l'énergie pour les polynômes quadratiques et cubiques dans le cas linéaire élastique . . . . .	77
4.3.2	Cas particulier d'un milieu micro-homogène . . . . .	80
4.3.3	La convergence du schéma d'homogénéisation pour les milieux élasto-plastiques . . . . .	82
4.4	Caractérisation du champ de fluctuations . . . . .	83
4.5	La contribution globale de la fluctuation à l'énergie et au gradient macroscopique de déformation . . . . .	83
4.6	Calculs des modules effectifs d'ordre supérieur . . . . .	87
4.6.1	Principe du calcul des modules effectifs . . . . .	87
4.6.2	Calcul des modules effectifs du milieu de substitution du second gradient . . . . .	87
4.6.3	Calcul des modules effectifs du milieu de substitution de Cosserat . . . . .	92
4.7	Quelques remarques et perspectives . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Validation</b>	<b>97</b>
5.1	Introduction . . . . .	98
5.2	Définition de milieu généralisé effectif . . . . .	100
5.2.1	Milieu global micromorphe . . . . .	100
5.2.2	Le milieu du second gradient . . . . .	101
5.2.3	Milieu global de Cosserat . . . . .	102
5.3	Condition polynômiale de chargement du VER . . . . .	103
5.3.1	Sélection des coefficients du polynôme . . . . .	103
5.3.2	Rôle du champ de fluctuation . . . . .	103
5.3.3	Existence du VER pour les conditions polynômiales aux limites . . . . .	105
5.4	Identification des modules élastiques effectifs généralisés . . . . .	105
5.4.1	Définition du matériau composite considéré . . . . .	105
5.4.2	Identification des modules élastiques classiques . . . . .	107
5.4.3	Identification des modules d'élasticité effectifs de Cosserat . . . . .	107
5.4.4	La taille du VER pour les propriétés du milieu global de Cosserat et du second gradient . . . . .	111

---

5.4.5	Identification des modules effectifs du modèle du second gradient élastique	115
5.4.6	Identification des modules élastiques effectifs micromorphes . . . . .	117
5.5	Validation de la méthode d'homogénéisation d'ordre supérieur . . . . .	118
5.5.1	Calcul de structure de référence et mise en défaut de l'approche de Cauchy . . . . .	120
5.5.2	Calcul avec trois milieux généralisés homogènes substitutifs différents	120
5.6	Validation et relocalisation dans le cas d'autres conditions de chargement d'une structure composite . . . . .	124
5.6.1	Cas analytique et cas d'un chargement combiné . . . . .	124
5.6.2	Deux calculs de référence . . . . .	126
5.6.3	Comparaison des prédictions de Cauchy, de Cosserat et second-gradient	126
5.6.4	Relocalisation des déformations . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>135</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte industriel

Les matériaux composites, notamment sous forme de sandwichs, sont largement utilisés dans l'industrie, en particulier dans l'industrie aéronautique, marine, automobile, en génie civil... Un sandwich dont le cœur est en mousse métallique peut être intéressant car il est léger et a une bonne résistance aux chocs.

Dans le cadre d'un contrat de programme CPR du CNRS, le projet MAM (Matériaux Architecturés Multi-fonctionnels) a été lancé en collaboration avec deux groupes EDF et Accelor Mittal. Matériaux architecturés se réfèrent au système des matériaux dont la structure (au niveau micro, nano ou moléculaire) est préalablement conçue. Son principe de conception "A+B+la forme + l'échelle" est présenté dans (Kromm et al., 2002). La maximisation du choix des composantes de matériaux "A,B", de laquelle le gaz ou simplement le vide est possible d'être compté comme une composante, nous permet d'élargir le plus l'espace de conception des matériaux d'après (Bréchet and Ashby, 2003), afin de trouver les nouveaux matériaux artificiels qui répondent aux nouveaux cahiers des charges. Cette thèse se positionne dans le cas de conception d'un matériau poreux dont les diamètres des vides est au niveau millimétrique ou centimétrique. La thèse est l'une des trois faisant partie de ce projet. Le projet MAM a pour objectif d'optimiser la forme et le choix du matériau pour un sandwich architecturé multi-fonctionnel. Son but est d'obtenir un matériau léger qui aurait également une bonne résistance mécanique et des propriétés thermiques optimisées. Le cahier des charges des partenaires industriels est varié : plaque métallique multi-couches légère et bien résistante pour la fabrication de carrosserie de voiture auprès du groupe Arcelor Mittal, cloison légère avec faible conduction thermique pour la construction des bâtiments BBC (Bâtiment en Basse Consommation de l'électricité) auprès du groupe EDF. Les deux groupes industriels s'intéressent au même type de matériau : matériau sandwich dont les deux peaux sont des plaques et le cœur est un matériau poreux ou à changement de phase. Chaque groupe pilote une thèse pour le but d'optimiser le matériau de leur cible. Un problème commun auquel les deux groupes s'intéressent est comment donner un modèle de calcul simplifié, moins "coûteux" du point de vue numérique pour les ingénieurs, que l'exigerait la prise en compte de tous les constituants du matériau. Cette question est ainsi étudiée dans le cadre de ma thèse en proposant la méthode d'homogénéisation d'ordre supérieur comme une solution possible. Le but est d'établir une loi de comportement homogène équivalente pour les matériaux hétérogènes au niveau local en utilisant le modèle de milieux généralisés comme matériau homogène de substitution. Trois thèses de ce projet se réalisent dans trois laboratoires différentes :

- La thèse de Laurent Laszczyk sous l'encadrement du Professeur Yves Bréchet au laboratoire Simap à INP Grenoble, piloté directement par le groupe Accelor Mittal.

- La thèse de Juan-Pablo Arzamendia Lopez sous l’encadrement du professeur Dominique Baillis (a commencé en 2009) au laboratoire Céthil à INSA de Lyon, piloté directement par groupe EDF.
- La présente thèse de Duy Khanh Trinh sous l’encadrement du Professeur Samuel Forest au Centre des matériaux P.M. FOURT à Mines ParisTech, piloté par CNRS.

## 1.2 Contexte scientifique

Comme mentionné dans la partie précédente, un modèle de calcul simplifié est le but de la thèse. Pour simuler les matériaux dont la microstructure est hétérogène, il y a actuellement trois directions (mentionnées dans (Jänike and Diebels, 2009)) :

- Micro-simulation : la microstructure est entièrement prise en compte dans la simulation. Cette méthode est très “coûteuse” car elle demande non seulement une abondante ressource numérique mais aussi une longue durée de calcul.
- Macro-simulation : seul le niveau macroscopique (niveau de structure) est simulé. A ce niveau, l’influence de l’hétérogénéité de microstructure est également prise en compte en introduisant les degrés supplémentaires de liberté, ou la longueur interne de matériau. Cependant, la longueur caractéristique de matériau est très difficile à identifier.
- Micro-macro simulation : une méthode mixte *e.g* méthode  $EF^2$  est proposée par (Feyel, 2003), où à chaque point matériau au niveau global, la loi de comportement est remplacée par la solution d’un problème auxiliaire sur le VER (Volume Élémentaire Représentatif) attaché au point considéré. Cette méthode est encore “coûteuse”.

La méthode d’homogénéisation que l’on va présenter dans cette thèse insiste sur l’usage des milieux continus généralisés, comme milieu homogène équivalent à substituer au matériau hétérogène au niveau mésoscopique ou microscopique. Elle concerne aussi le problème micro-mécanique sur un VER, mais la différence par rapport à la méthode mixte micro-macro est qu’elle fournit une loi de comportement homogène explicite au niveau macroscopique.

L’homogénéisation classique par un milieu de Cauchy a rencontré de nombreux succès dans l’étude des matériaux hétérogènes. Elle connaît toutefois des limites lorsque le chargement macroscopique appliqué varie sur des longueurs qui sont de l’ordre de la taille des hétérogénéités en présence ou lors que la séparation d’échelle n’est pas assurée. C’est notamment le cas en présence de forts gradients de sollicitation ou de déformation, par exemple lors de la flexion de matériau sandwich. L’objectif de l’homogénéisation par des milieux continus généralisés est de remédier à ces limitations et d’étendre la validité de l’approche continue au-delà de l’hypothèse stricte de séparation des échelles. Les échelles sont dites séparées lorsque les tailles des hétérogénéités sont infiniment plus petites que les dimensions structurales. Dans ce cas, le chargement macroscopique peut être considéré comme homogène à l’échelle des hétérogénéités. Cette hypothèse n’est souvent plus valide dans le cas des matériaux architecturés dont les composants ont des dimensions millimétriques ou centimétriques.

Il y a eu beaucoup d’avancements pendant les 10 dernières années dans le même domaine de recherche. Les contributions développent essentiellement la modélisation multi-échelle des matériaux par le modèle du milieu de Cosserat (ou milieu micropolaire), du milieu du second-gradient, du milieu à couples de contraintes et récemment du milieu micromorphe. La modélisation multi-échelle est réalisée par plusieurs méthodes : soit avec la technique numérique de moyenne sur un VER, soit avec des méthodes de développements asymptotiques, soit par des méthodes plus empiriques. Les résultats sont toujours mis en comparaison l’un à l’autre. Ils donnent actuellement une connaissance assez claire de l’homogénéisation. Mais en général, il y a encore des questions sur l’application des modèles généralisés à l’homogénéisation. Il y a encore des résultats contradictoires et des discussions

ouvertes sur des aspects différents. Ma contribution suit la technique d'utilisation des moyennes des champs locaux, avec l'intention de chercher une méthode pas trop lourde mais systématique pour modéliser les matériaux composites par un milieu continu généralisé. La motivation de cette méthode est sa bonne applicabilité à toute micro-structure, et aussi d'être applicable relativement simplement au comportement non-linéaire (comportement élasto-plastique). Elle concentre l'étude du rôle des fluctuations locales pour la détermination des propriétés d'ordre supérieur. Dans la partie bibliographique de cette thèse, dans le chapitre 3, on présente des travaux qui sont très proches de ma contribution afin de mettre en évidence les différences subtiles entre les approches disponibles. Ils s'agit des ouvrages de (Kouznetsova et al., 2004b; Kouznetsova et al., 2002a), de (Jänike and Diebels, 2009), de (Ostoja-Starzewski et al., 1999a; Bouyge et al., 2001a) et de (Forest and Sab, 1998a).

### 1.3 Notations

Les notations intrinsèques sont utilisées tout au long de ce travail mais les notations indicielles sont explicitées aussi pour éviter les confusions. En particulier, les scalaires, les vecteurs, les tenseurs d'ordre 2, 3, 4 et 5 se dénotent respectivement :  $a, \underline{a}, \underline{\underline{a}}, \underline{\underline{\underline{a}}}, \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}}$ . Les contractions sont écrites sous la forme :

$$\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} = a_{ij}b_{ij}, \quad \underline{\underline{\underline{a}}} : \underline{\underline{\underline{b}}} = a_{ijk}b_{ijk}, \quad \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}} :: \underline{\underline{\underline{\underline{b}}}} = a_{ijkl}b_{ijkl} \quad (1.1)$$

utilisant la règle d'Einstein pour les indices répétés. L'opérateur gradient  $\nabla_x$  ou  $\nabla_X$  est introduit lors que les fonctions dépendent sur des coordonnées microscopiques  $\underline{x}$  ou macroscopiques  $\underline{X}$ . Les notations suivantes sont utilisées :

$$\underline{U} \otimes \nabla_X = U_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad \text{with} \quad U_{i,j} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \quad (1.2)$$

$$\underline{u} \otimes \nabla_x = u_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad \text{with} \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.3)$$

où  $(\underline{e}_i)_{i=1,2,3}$  est une base cartésienne orthonormée.

Tout le long de cette thèse, l'analyse est limitée au cadre de l'hypothèse des petites déformations.





## Chapitre 2

# Premiers éléments de mécanique des milieux continus généralisés et d'homogénéisation

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Quelques éléments sur les milieux continus généralisés . . . . .</b>	<b>6</b>
2.1.1	Milieu de Cosserat . . . . .	6
2.1.2	Milieu du second-gradient . . . . .	7
2.1.3	Milieu micromorphe . . . . .	8
<b>2.2</b>	<b>Calcul analytique . . . . .</b>	<b>9</b>
2.2.1	Approche par le milieu de Cosserat/milieu micropolaire . . . . .	9
	Degrés de liberté & équations d'équilibre . . . . .	9
	Cosserat isotrope (les équations 2.4 - 2.5) . . . . .	10
	Elasticité orthotrope . . . . .	13
2.2.2	Approche par la théorie du second-gradient . . . . .	16
2.2.3	Approche par le milieu micromorphe . . . . .	19
<b>2.3</b>	<b>Généralités sur l'homogénéisation . . . . .</b>	<b>25</b>
2.3.1	VER et propriétés effectives . . . . .	25
2.3.2	Conditions aux limites et moyenne des champs locaux . . . . .	27
2.3.3	Homogénéisation d'ordre supérieur et conditions aux limites non-homogènes . . . . .	28

---

## 2.1 Quelques éléments sur les milieux continus généralisés

Un milieu généralisé est une extension du milieu continu classique de Cauchy, qui est très bien connu dans tous les manuels de “Mécanique des milieux continus”. Le milieu classique suppose que pour chaque point matériel, il n’y a que trois degrés de liberté (ddls) de déplacement  $\underline{u}$  ( $u_1, u_2, u_3$ ), et la mesure de déformation est le gradient au premier ordre des ddls, soit  $\underline{u} \otimes \nabla$ . Ainsi un point matériel ne se déplace suivant que trois directions dans l’espace 3D. Cette hypothèse n’est plus suffisante dans les milieux généralisés. Ces derniers se composent de deux classes : milieu d’ordre supérieur où les nouveaux degrés de liberté  $\underline{\chi}, \underline{\Phi} \dots$  sont introduits, milieu de degré supérieur où les gradients d’ordre supérieur  $\underline{u} \otimes \nabla \otimes \nabla \dots$  sont utilisés pour mesurer la déformation. Dans les parties suivantes, les milieux continus typiques sont présentés :

### 2.1.1 Milieu de Cosserat

Ce milieu est l’archétype du milieu d’ordre supérieur. Il y a un autre nom pour ce milieu continu généralisé : milieu micropolaire (comme dans quelques contributions). Il est nommé Cosserat en l’honneur des frères Cosserat dont l’ouvrage commun (Cosserat and Cosserat, 1909) était oublié pendant une longue période. Ce milieu est considéré comme une collection continue de particules. Chacune de dernières se comporte comme un corps rigide. Par conséquent, chaque point matériel est décrit par ses déplacements et la rotation de sa microstructure. Ainsi, les composantes du vecteur rotation  $\underline{\Phi}$  ( $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ ) sont ajoutés comme les degrés de liberté supplémentaires. Ici, seulement les caractéristiques essentielles du milieu de Cosserat sont abordées, pour plus de détails, le livre (Cosserat and Cosserat, 1909) vient d’être republié à l’occasion de la conférence Cosserat100.

– Degrés de liberté :

$$\underline{u}(u_1, u_2, u_3) \quad \underline{\Phi}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \quad (2.1)$$

– Mesures de déformation (déformation et courbure) :

$$\underline{e} = \underline{u} \otimes \nabla + \underline{\epsilon} \cdot \underline{\Phi} \quad e_{ij} = u_{i,j} + \epsilon_{ijk} \Phi_k \quad (2.2)$$

$$\underline{\kappa} = \underline{\Phi} \otimes \nabla \quad \kappa_{ij} = \Phi_{i,j} \quad (2.3)$$

– Loi de comportement :

– Elasticité isotrope :

$$\underline{\sigma} = \lambda \underline{1} tr \underline{e} + 2\mu \underline{e}^{sym} + 2\mu_c \underline{e}^{as} \quad \sigma_{ij} = \lambda e_{kk} + (\mu + \mu_c) e_{ij} + (\mu - \mu_c) e_{ij} \quad (2.4)$$

$$\underline{m} = \alpha \underline{1} tr \underline{\kappa} + 2\beta \underline{\kappa}^{sym} + 2\gamma \underline{\kappa}^{as} \quad m_{ij} = \alpha e_{kk} + (\beta + \gamma) \kappa_{ij} + (\beta - \gamma) \kappa_{ij} \quad (2.5)$$

où  $\underline{A}^{sym}, \underline{A}^{as}$  sont respectivement les parties symétrique  $A_{ij}^{sym} = A_{ji}^{sym}$  et anti-symétrique  $A_{ij}^{as} = -A_{ji}^{as}$  du tenseur  $\underline{A}$ .

– Elasticité orthotrope bidimensionnelle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ m_{31} \\ m_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1111} & y_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{1122} & y_{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{1212} & y_{1221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{1221} & y_{2121} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3232} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ \kappa_{31} \\ \kappa_{32} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

– Equations d'équilibre :

$$\underline{\sigma} \cdot \nabla + \underline{f} = 0 \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.7)$$

$$\underline{m} \cdot \nabla - \underline{\varepsilon} : \underline{\sigma} + \underline{c} \quad m_{ij,j} - \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + c_i = 0 \quad (2.8)$$

où  $\underline{\sigma}$  est le tenseur des contraintes généralement non symétriques et  $\underline{m}$  est le tenseur des couples de contraintes. Les efforts volumiques sont les forces  $\underline{f}$  et les couples  $\underline{m}$ .

### 2.1.2 Milieu du second-gradient

Le milieu du second-gradient est une représentation de la classe des milieux de degré supérieur où il n'y pas de ddls supplémentaires mais le second gradient de déplacement est compté comme les mesures de déformation. Un petit résumé de ce milieu est ensuite présenté :

– Degrés de liberté :

$$\underline{u}(u_1, u_2, u_3) \quad u_i \quad (2.9)$$

– Mesures de déformation (premier et second gradients du déplacement) :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\underline{u} \otimes \nabla + (\underline{u} \otimes \nabla)^T) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.10)$$

$$\underline{K} = \underline{u} \otimes \nabla \otimes \nabla \quad K_{ijk} = u_{i,jk} \quad (2.11)$$

– Loi de comportement :

– Elasticité généralisée

$$\underline{\sigma} = \underline{C} : \underline{\varepsilon}, \quad \underline{M} = \underline{A} : \underline{K} \quad (2.12)$$

– Elasticité isotrope :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.13)$$

$$\begin{pmatrix} S_{111} \\ S_{112} \\ S_{221} \\ S_{222} \\ S_{121} \\ S_{122} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 & a_1 + 2a_2 & 0 & 0 & a_1 + 2a_3 \\ 0 & 2(a_2 + a_4) & 0 & a_1 + 2a_2 & a_1 + 2a_5 & 0 \\ a_1 + 2a_2 & 0 & 2(a_2 + a_4) & 0 & 0 & a_1 + 2a_5 \\ 0 & a_1 + 2a_2 & 0 & 2a & a_1 + 2a_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a_1 + a_5 & 0 & \frac{1}{2}a_1 + a_3 & a_{345} & 0 \\ \frac{1}{2}a_1 + a_3 & 0 & \frac{1}{2}a_1 + a_5 & 0 & 0 & a_{345} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{111} \\ M_{112} \\ M_{221} \\ M_{222} \\ M_{121} \\ M_{122} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

où  $a_i$  est la longueur interne (son unité est en MPamm<sup>2</sup>) de matériau et  $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ ,  $a_{345} = a_3 + 2a_4 + a_5$ . L'équation (2.13) est la loi élastique classique de Hooke.

– Elasticité orthotrope :

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & A_{56} \\ 0 & 0 & 0 & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Une explication plus détaillée de cette matrice d'élasticité sera donnée dans le chapitre 5.

- Equation d'équilibre du milieu du second-gradient :

$$\underline{\tau} \cdot \nabla_X = 0 \quad \underline{\tau} = \underline{\sigma} - \underline{\underline{M}} \cdot \nabla_X \quad (2.16)$$

où  $\underline{\underline{M}}$  est le tenseur des hypercontraintes (Mindlin and Eshel, 1968).

### 2.1.3 Milieu micromorphe

Le milieu le plus généralisé actuellement connu est le milieu micromorphe (Germain, 1973). Sa formulation est comme un milieu d'ordre supérieur, il peut se réduire à modèle de milieu de Cosserat ou avec la condition de liaison interne pertinente, il se réduit à milieu second-gradient (milieu de degré supérieur).

- Degrés de liberté :

$$\underline{u} \quad \underline{\chi} \quad u_i \quad \chi_{ij} \quad (2.17)$$

où  $\underline{\chi}$  est un tenseur d'ordre 2 nommé tenseur de micro-déformation.

- Mesures de déformation (déformation, déformation relative et gradient de micro-déformation) :

$$\underline{\varepsilon} = (\underline{u} \otimes \nabla)^{sym} \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j})^{sym} \quad (2.18)$$

$$\underline{e} = \underline{u} \otimes \nabla - \underline{\chi} \quad e_{ij} = u_{i,j} - \chi_{ij} \quad (2.19)$$

$$\underline{\kappa} = \underline{\chi} \otimes \nabla \quad K_{ijk} = \chi_{ij,k} \quad (2.20)$$

Ce milieu se transforme à autre modèles de milieu généralisé avec des restrictions supplémentaires :

- le modèle de milieu second-gradient est trouvé si  $\underline{\chi} = \underline{u} \otimes \nabla$
- le modèle de milieu de Cosserat est trouvé si  $\underline{\chi} = \underline{\chi}^{as}$
- Loi de comportement élastique isotrope :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + g_1 e_{pp} \delta_{ij} + g_2 (e_{ij} + e_{ji}) \quad (2.21)$$

$$s_{ij} = g_1 e_{pp} \delta_{ij} + 2g_2 \varepsilon_{ij} + b_1 e_{pp} \delta_{ij} + b_2 e_{ij} + b_3 e_{ji} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} S_{pqr} = & A_1(K_{rii}\delta_{pq} + K_{iip}\delta_{qr}) + A_2(K_{iiq}\delta_{pr} + K_{iri}\delta_{pq}) \\ & + A_3K_{jjr}\delta_{pq} + A_4K_{pii}\delta_{qr} + A_5(K_{ipi}\delta_{qr} + K_{qii}\delta_{pr}) + A_8K_{iqi}\delta_{qr} \\ & + A_{10}K_{pqr} + A_{11}(K_{qrp} + K_{rpq}) + A_{13}K_{prq} + A_{14}K_{qpr} + A_{15}K_{rqp} \end{aligned} \quad (2.23)$$

où  $g_i, b_i, A_{ij}$  dans les équations (2.21 - 2.23) sont les modules d'élasticité généralisés qui font intervenir des longueurs internes du matériau.

- Equations d'équilibre :

$$(\underline{\sigma} + \underline{s}) \cdot \nabla + \underline{f} = 0 \quad (\sigma_{ij} + s_{ij})_{,j} + f_i = 0 \quad (2.24)$$

$$\underline{\underline{S}} \cdot \nabla + \underline{s} + \underline{P} = 0 \quad S_{ijk,k} + s_{ij} + P_{ij} = 0 \quad (2.25)$$

où apparaissent les contraintes usuelles  $\underline{\sigma}$ , les contraintes relatives  $\underline{s}$  et les doubles contraintes  $\underline{\underline{S}}$ .

Dans toutes ces lois, on voit intervenir de nouveaux paramètres matériaux par rapport aux modules usuels de l'élasticité. L'objectif de cette thèse est de présenter et discuter des méthodes d'estimation de ces constantes à partir de la connaissance de l'architecture du matériau et du comportement des constituants.

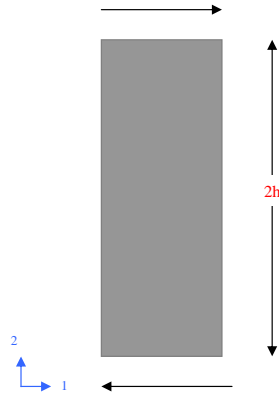


FIG. 2.1 – Modèle de la poutre &amp; conditions aux limites

## 2.2 Calcul analytique

Dans cette section, l'approche analytique par les milieux généralisés est présentée afin de bien illustrer le fonctionnement de ces modèles. Un problème de double cisaillement est considéré sur la figure 2.1, la poutre homogène sera modélisée successivement par le milieu de Cosserat, le milieu du second-gradient et le milieu micromorphe. L'objectif de cette section est de donner une vue plus détaillée des milieux généralisés et de comparer le calcul analytique avec le calcul par éléments finis, grâce aux modèles des milieux généralisés, implémentés dans le code Zébulon. La courbe de déplacement horizontal dans le cas de l'approche par le milieu de Cosserat sera réutilisée dans le chapitre 5.

### 2.2.1 Approche par le milieu de Cosserat/milieu micropolaire

Les conditions aux limites dans le cas de milieu de Cosserat sont de la forme suivante :

$$u_1 = \frac{\delta}{2}, u_2 = 0, \Phi = \Phi_3 = 0 \quad (2.26)$$

en  $x_2 = h$ , où  $\delta$  est le glissement imposé,

$$u_1 = -\frac{\delta}{2}, u_2 = 0, \Phi = \Phi_3 = 0 \quad (2.27)$$

en  $x_2 = -h$ .

Les microrotations sont supposées nulles en haut et en bas, simulant un encastrement du milieu de Cosserat. On s'intéresse ici à une solution invariante selon  $x_1$  de sorte que les champs de déplacement et de micro-rotation cherchés ne dépendent que de  $x_2$ .

### Degrés de liberté & équations d'équilibre

Les degrés de liberté et les mesures de déformation sont présentés dans les équations (2.1 - 2.3), ils sont rapidement rappelés ici :

$$e_{ij} = u_{i,j} + \epsilon_{ijk} \Phi_k \quad \kappa_{ij} = \Phi_{i,j}$$

la fonction de déplacement et de micro-rotation est cherchée sous la forme indépendante de  $x_1$  :

$$\underline{u} = u(x_2)\underline{e}_1 \quad \underline{\Phi} = \Phi(x_2)\underline{e}_3$$

Ainsi les tenseurs des mesures de déformation sont calculés :

$$[e] = \begin{pmatrix} 0 & u' + \Phi & 0 \\ -\Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [\kappa_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi' & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

où  $u' = \frac{\partial u}{\partial x_2}$ . A partir des équations d'équilibre (2.7 -2.8), nous établirons la fonction de déplacement et de micro-rotation. Deux lois de comportement sont considérées :

### Cosserat isotrope (les équations 2.4 - 2.5)

Mettons  $\beta = \gamma$  pour simplifier le calcul :

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{e})\underline{1} + 2\mu\underline{e}^{sym} + 2\mu_c\underline{e}^{sk} \quad \underline{m} = \alpha(\text{trace } \underline{\kappa})\underline{1} + 2\beta\underline{\kappa} \quad (2.29)$$

en combinaison avec (2.28), les expressions détaillées de déplacement et micro-rotation sont trouvées :

$$\sigma_{12} = \mu u' + \mu_c u' + 2\mu_c \Phi \quad \sigma_{21} = \mu u' - \mu_c u' - 2\mu_c \Phi \quad m_{32} = 2\beta \Phi' \quad (2.30)$$

Remplaçons-les dans les équations d'équilibre (2.7 -2.8) :

$$\mu u'' + \mu_c u'' + 2\mu_c \Phi' = 0 \Leftrightarrow u'' = -\frac{2\mu_c}{\mu + \mu_c} \Phi' \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} m_{32,2} + m_{31,1} - \sigma_{12,2} + \sigma_{21,1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\beta \Phi'' - 2\mu_c u' - 4\mu_c \Phi &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta \Phi'' - \mu_c u' - 2\mu_c \Phi &= 0 \\ \Leftrightarrow u' = \frac{\beta}{\mu_c} \Phi'' - 2\Phi & \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\Rightarrow u'' = \frac{\beta}{\mu_c} \Phi''' - 2\Phi' \quad (2.33)$$

Considérons aussi (2.31), nous avons :

$$\begin{aligned} -\frac{2\mu_c}{\mu + \mu_c} \Phi' &= \frac{\beta}{\mu_c} \Phi''' - 2\Phi' \\ \left(2 - \frac{2\mu_c}{\mu + \mu_c}\right) \Phi' &= \frac{\beta}{\mu_c} \Phi''' \\ \frac{2\mu}{\mu + \mu_c} \Phi' &= \frac{\beta}{\mu_c} \Phi''' \\ \Phi''' &= \frac{2\mu\mu_c}{\beta(\mu + \mu_c)} \Phi' \\ \theta''(x) &= \omega^2 \theta(x) \end{aligned} \quad (2.34)$$

où nous supposons que  $\frac{2\mu\mu_c}{\beta(\mu + \mu_c)} = \omega^2 > 0$ , condition remplie lorsque les tenseurs d'élasticité sont définis positifs. La solution de (2.34) est connue sous la forme :

$$\theta(x) = C_1 \cosh(\omega x) + C_2 \sinh(\omega x) \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{C_1}{\omega} \sinh(\omega x) + \frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega x) + C_3 \quad (2.36)$$

La condition aux deux extrémités  $\Phi(h) = \Phi(-h) = 0$  nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{\omega} \sinh(\omega h) + \frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega h) + C_3 &= 0 \\ -\frac{C_1}{\omega} \sinh(\omega h) + \frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega h) + C_3 &= 0 \\ \Rightarrow \Phi(h) - \Phi(-h) &= 0 \\ \Rightarrow C_1 &= 0 \\ \Rightarrow \Phi(x) &= \frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega x) + C_3 \end{aligned} \quad (2.37)$$

De (2.35), nous trouvons :

$$\theta'(x) = \phi''(x) = \omega C_2 \cosh(\omega x) \quad (2.38)$$

et de (2.33), nous trouvons :

$$u' = \frac{\beta}{\mu_c} \omega C_2 \cosh(\omega x) - \frac{2C_2}{\omega} \cosh(\omega x) - 2C_3 \quad (2.39)$$

$$\Rightarrow u = \left( \frac{\beta}{\mu_c} - \frac{2}{\omega^2} \right) C_2 \sinh(\omega x) - 2C_3 x + C_4 \quad (2.40)$$

Les conditions aux limites  $u(h) = -u(-h) = \frac{\delta}{2}$  mènent à :

$$\begin{aligned} u(h) &= \left( \frac{\beta}{\mu_c} - \frac{2}{\omega^2} \right) C_2 \sinh(\omega h) - 2C_3 h + C_4 = \frac{\delta}{2} \\ u(-h) &= -\left( \frac{\beta}{\mu_c} - \frac{2}{\omega^2} \right) C_2 \sinh(\omega h) + 2C_3 h + C_4 = -\frac{\delta}{2} \\ \Rightarrow u(h) + u(-h) &= 0 \Rightarrow C_4 = 0 \\ \Rightarrow u(x) &= \left( \frac{\beta}{\mu_c} - \frac{2}{\omega^2} \right) C_2 \sinh(\omega x) - 2C_3 x \end{aligned} \quad (2.41)$$

Remplaçons  $\Phi(h) = 0$  dans (2.37), le coefficient  $C_3$  est trouvé :

$$\Phi(h) = \frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega h) + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{1}{\omega} \cosh(\omega h) C_2 \quad (2.42)$$

Remplaçons (2.42) dans (2.40), les conditions aux limites se transforment :

$$\begin{aligned} u(h) &= \left( \frac{\beta}{\mu_c} - \frac{2}{\omega^2} \right) C_2 \sinh(\omega h) - 2C_3 h = \frac{\delta}{2} \\ u(h) &= \left( \frac{\beta}{\mu_c} - \frac{2}{\omega^2} \right) C_2 \sinh(\omega h) + 2\frac{1}{\omega} \cosh(\omega h) C_2 h = \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Nous en extrayons le coefficient  $C_2$  :

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\delta}{2 \left[ \left( \frac{\beta}{\mu_c} - \frac{2}{\omega^2} \right) \sinh(\omega h) + 2\frac{1}{\omega} \cosh(\omega h) h \right]} \quad (2.44)$$

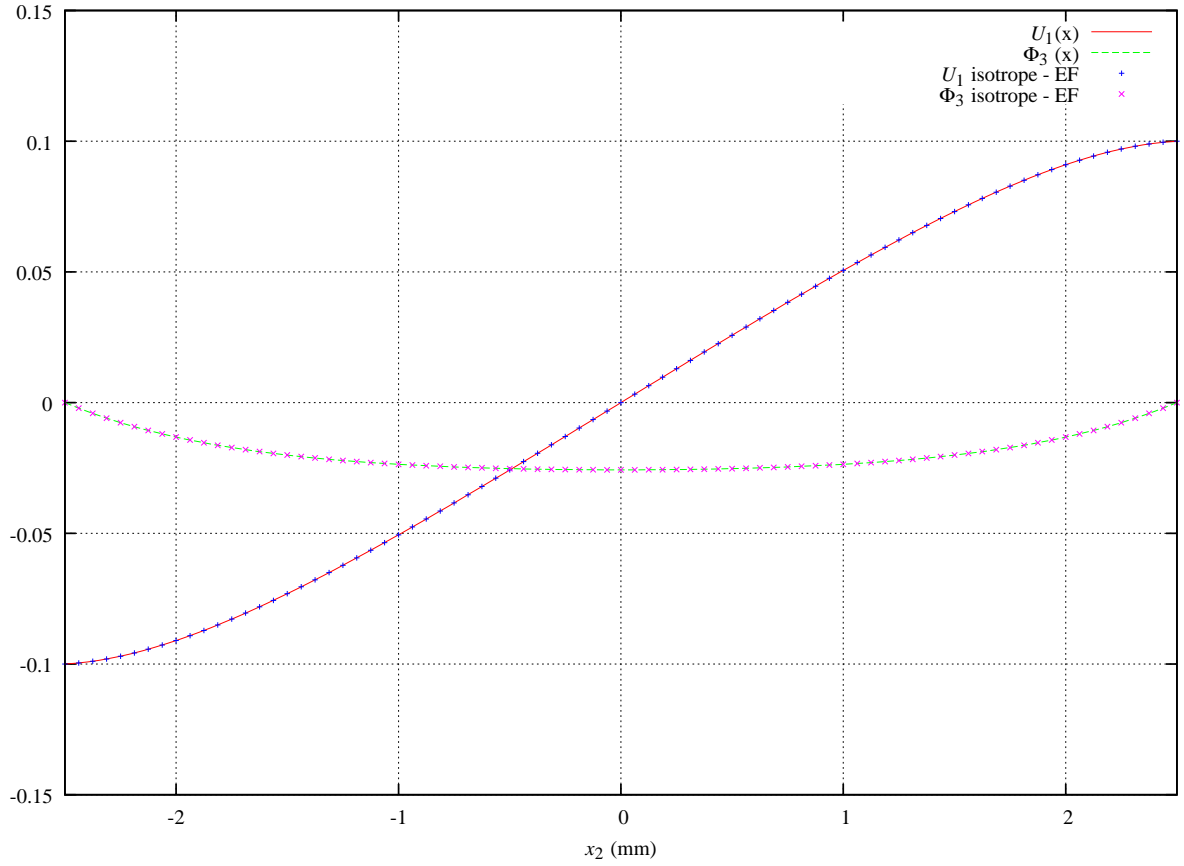


FIG. 2.2 – Déplacement  $u$  et micro-rotation  $\Phi$  lors d'un essai de double cisaillement selon la solution analytique et le calcul par éléments finis, dans un cas de comportement élastique isotrope. Les propriétés du matériau :  $E = 70000$  MPa,  $\nu = 0,3$  ;  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  ;  $\mu_c = 100000$  MPa ;  $\gamma = \beta = 30000$  MPamm<sup>2</sup>.



**Elasticité orthotrope**

La loi de comportement (2.6) de milieu homogène de Cosserat est rappelée :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ m_{31} \\ m_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1111} & y_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{1122} & y_{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{1212} & y_{1221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{1221} & y_{2121} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3232} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ \kappa_{31} \\ \kappa_{32} \end{pmatrix}$$

A partir des matrices dans (2.28) :

$$\sigma_{12} = y_{1212}e_{12} + y_{1221}e_{21} = y_{1212}(u' + \Phi) + y_{1221}(-\Phi) \quad (2.45)$$

$$\sigma_{21} = y_{1221}e_{12} + y_{2121}e_{21} = y_{1221}(u' + \Phi) + y_{2121}(-\Phi) \quad (2.46)$$

$$m_{32} = c_{3232}\kappa_{32} = c_{3232}\Phi' \quad (2.47)$$

De façon similaire, toujours suivant les équations d'équilibre (2.7 – 2.8) du milieu Cosserat, le second-gradient de déplacement est trouvé :

$$y_{1212}(u'' + \Phi') - y_{1221}\Phi' = 0 \Leftrightarrow u'' = \frac{y_{1221}}{y_{1212}}\Phi' - \Phi' \quad (2.48)$$

$$c_{3232}\Phi'' - y_{1212}(u' + \Phi) + y_{1221}\Phi + y_{1221}(u' + \Phi) - y_{2121}\Phi = 0$$

$$\Leftrightarrow u'(y_{1212} - y_{1221}) = c_{3232}\Phi'' + (2y_{1221} - y_{1212} - y_{2121})\Phi$$

$$\Leftrightarrow u' = \frac{c_{3232}}{y_{1212} - y_{1221}}\Phi'' + \frac{2y_{1221} - y_{1212} - y_{2121}}{y_{1212} - y_{1221}}\Phi \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow u'' = \frac{c_{3232}}{y_{1212} - y_{1221}}\Phi''' + \frac{2y_{1221} - y_{1212} - y_{2121}}{y_{1212} - y_{1221}}\Phi' \quad (2.50)$$

En utilisant (2.48) et (2.50), les équations différentielles sont trouvées :

$$\begin{aligned} \frac{y_{1221}}{y_{1212}}\Phi' - \Phi' &= \frac{c_{3232}}{y_{1212} - y_{1221}}\Phi''' + \frac{2y_{1221} - y_{1212} - y_{2121}}{y_{1212} - y_{1221}}\Phi' \\ \frac{y_{1221}}{y_{1212}}\Phi' - \Phi' &= \frac{c_{3232}}{y_{1212} - y_{1221}}\Phi''' + \frac{(y_{1221} - y_{1212}) + (y_{1221} - y_{2121})}{y_{1212} - y_{1221}}\Phi' \\ \Phi' \left( \frac{y_{1221}^2 - y_{1212}y_{2121}}{y_{1212}(y_{1221} - y_{1212})} \right) &= \frac{c_{3232}}{y_{1212} - y_{1221}}\Phi''' \\ \Phi''' &= \left( \frac{y_{1212}y_{2121} - y_{1221}^2}{c_{3232}y_{1212}} \right) \Phi' \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$(2.52)$$

Mettons  $\Phi'(x) = \theta(x)$  et  $\omega^2 = \frac{y_{1212}y_{2121} - y_{1221}^2}{c_{3232}y_{1212}}$  (la positivité du tenseur d'élasticité garantit la positivité de  $\omega^2$ ), l'équation (2.52) s'écrit :

$$\theta'' = \omega^2 \theta \quad (2.53)$$

Donc, nous cherchons la solution sous la forme :  $\theta(x) = C_1 \cosh(\omega x) + C_2 \sinh(\omega x)$

$$\Rightarrow \Phi(x) = \frac{C_1}{\omega} \sinh(\omega x) + \frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega x) + C_3 \quad (2.54)$$

et

$$\Rightarrow \Phi''(x) = \omega(C_1 \sinh(\omega x) + C_2 \cosh(\omega x)) \quad (2.55)$$

Retournons à (2.49), mettons :  $\beta = \frac{c_{3232}}{y_{1212} - y_{1221}}$  et  $\gamma = \frac{2y_{1221} - y_{1212} - y_{2121}}{y_{1212} - y_{1221}}$ , en considérant également (2.54) et (2.55), l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} u' &= \beta \Phi'' + \gamma \Phi = \beta \omega (C_1 \sinh(\omega x) + C_2 \cosh(\omega x)) + \frac{\gamma}{\omega} [C_1 \sinh(\omega x) + C_2 \cosh(\omega x)] + \gamma C_3 \\ &= \left( \beta \omega + \frac{\gamma}{\omega} \right) [C_1 \sinh(\omega x) + C_2 \cosh(\omega x)] + \gamma C_3 \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\Rightarrow u = \left( \beta + \frac{\gamma}{\omega^2} \right) [C_1 \cosh(\omega x) + C_2 \sinh(\omega x)] + \gamma C_3 x + C_4 \quad (2.57)$$

Appliquons les conditions aux limites à (2.54) et à (2.57) :

$$\begin{aligned} \Phi(h) = 0 &\Rightarrow \frac{C_1}{\omega} \sinh(\omega h) + \frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega h) + C_3 = 0 \\ \Phi(-h) = 0 &\Rightarrow -\frac{C_1}{\omega} \sinh(\omega h) + \frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega h) + C_3 = 0 \\ &\Rightarrow \Phi(h) - \Phi(-h) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

La condition  $\Phi(h) = 0$  nous donne :

$$C_3 = \frac{-C_2}{\omega} \cosh(\omega h) \quad (2.59)$$

Par conséquent, (2.57) devient :

$$u = \left( \beta + \frac{\gamma}{\omega^2} \right) C_2 \sinh(\omega x) + \gamma C_3 x + C_4 \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} u(h) &= \frac{\delta}{2} \Rightarrow \left( \beta + \frac{\gamma}{\omega^2} \right) C_2 \sinh(\omega h) + \gamma C_3 h + C_4 = \frac{\delta}{2} \\ u(-h) &= -\frac{\delta}{2} \Rightarrow -\left( \beta + \frac{\gamma}{\omega^2} \right) C_2 \sinh(\omega h) - \gamma C_3 h + C_4 = -\frac{\delta}{2} \\ u(h) + u(-h) &= 0 \Rightarrow C_4 = 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

Mettons (2.59) à  $u(h) = \frac{\delta}{2}$ , nous trouvons :

$$C_2 = \frac{\delta}{2 \left[ \left( \beta + \frac{\gamma}{\omega^2} \right) \sinh(\omega h) - \frac{\gamma h}{\omega} \cosh(\omega h) \right]} \quad (2.62)$$

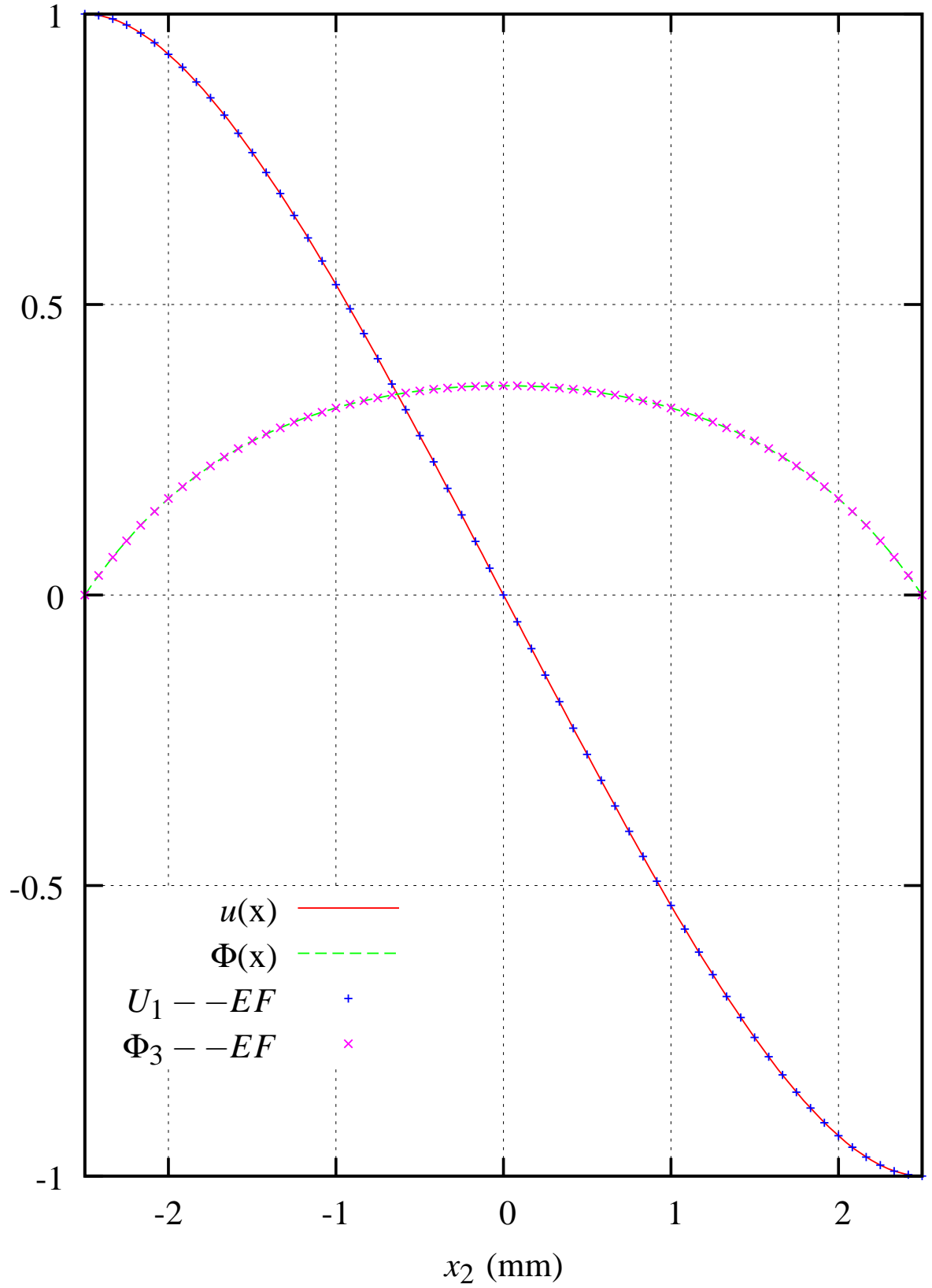


FIG. 2.3 – Déplacement  $u$  et micro-rotation  $\Phi$  lors d'un essai de double cisaillement selon les résultats du calcul analytique et par éléments finis, dans un cas du milieu de Cosserat orthotrope. Les modules de rigidité du matériau :  $c_{3232} = 878 \text{ MPamm}^2$ ;  $y_{1212} = 241250 \text{ MPa}$ ;  $y_{1221} = -128383 \text{ MPa}$ ;  $y_{2121} = 69188 \text{ MPa}$ .

### 2.2.2 Approche par la théorie du second-gradient

On donne ici la solution du problème de double cisaillement de la figure 2.1 dans le cas où le milieu considéré est orthotrope du second gradient. Les conditions aux limites sont alors :

$$u_1 = \frac{\delta}{2}, \quad u_2 = 0, \quad u' = 0 \quad \text{en} \quad x_2 = h \quad (2.63)$$

$$u_1 = -\frac{\delta}{2}, \quad u_2 = 0, \quad u' = 0 \quad \text{en} \quad x_2 = -h \quad (2.64)$$

La nullité de la dérivée de  $u$  exprime l'encastrement pour le milieu du second gradient. L'équation d'équilibre du milieu du second-gradient :

$$\underline{\tau} \cdot \nabla = 0 \quad \underline{\tau} = \underline{\sigma} - \underline{\underline{M}} \cdot \nabla \quad (2.65)$$

où  $\underline{\underline{M}}$  est le tenseur des contraintes d'ordre supérieur lié au tenseur de second-gradient du déplacement dans l'expression du travail des forces internes :

$$p = \underline{\sigma} : \underline{u} \otimes \nabla + \underline{\underline{M}} : \underline{u} \otimes \nabla \otimes \nabla \quad (2.66)$$

Notre objectif est de trouver le déplacement sous la forme  $\underline{U} = u_2(X_2)\underline{e}_1$ , donc, les mesures de déformations  $\underline{\varepsilon}, \underline{\underline{K}}$  sont :

$$\underline{u} \otimes \nabla = U' \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \quad \underline{\underline{K}} = U'' \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \quad (2.67)$$

Les contraintes sont ainsi calculées :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{K}} \quad (2.68)$$

Dans le cas d'un matériau élastique orthotrope, les matrices d'élasticité  $\underline{\underline{C}}$  et  $\underline{\underline{A}}$  s'écrivent successivement :

$$[\underline{\underline{C}}] = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix} \quad [\underline{\underline{A}}] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & A_{56} \\ 0 & 0 & 0 & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

où les modules de rigidité  $A_{ij}$  sont liés aux constantes d'élasticité utilisées dans (Auffray et al., 2009; Auffray et al., 2010) :

$$[A_{11} \ A_{12} \ A_{13} \ A_{22} \ A_{23} \ A_{33}] = \begin{bmatrix} A_{111111} & A_{111122} & \sqrt{2}A_{111212} & A_{122122} & \sqrt{2}A_{122212} & 2A_{212212} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

$$[A_{44} \ A_{45} \ A_{46} \ A_{55} \ A_{56} \ A_{66}] = \begin{bmatrix} A_{222222} & A_{222211} & \sqrt{2}A_{222121} & A_{211211} & \sqrt{2}K_{211121} & 2K_{121121} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

où :

$$\underline{\sigma} = \sigma_{12}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 = 2C_{1212}\varepsilon_{12}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \quad (2.72)$$

$$\underline{\underline{m}} = A_{122122} K_{122} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \quad (2.73)$$

Suite à l'équation (2.65), nous avons :

$$\begin{aligned} \tau_{12,2} &= 0 \\ \sigma_{12,2} - M_{122,22} &= 0 \\ 2C_{1212}\varepsilon_{12,2} - A_{122122}K_{122,22} &= 0 \\ C_{1212}u'' - A_{122122}u'''' &= 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

Afin de simplifier le calcul, nous notons :  $\frac{C_{1212}}{A_{122122}} = \omega^2 > 0$  pour des raisons de positivité des tenseurs d'élasticité. Notons également  $u''(x_2) = \theta(x)$ , l'équation (2.74) s'écrit alors :

$$\theta''(x) = \frac{C_{1212}}{A_{122122}}\theta(x) = \omega^2\theta(x) \quad (2.75)$$

Nous cherchons ainsi  $\theta(x) = C_1 \cosh(\omega x) + C_2 \sinh(\omega x)$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{C_1}{\omega^2} \cosh(\omega x) + \frac{C_2}{\omega^2} \sinh(\omega x) + C_3 x + C_4 \quad (2.76)$$

Les conditions aux limites sont répétées :

$$u(h) = -u(-h) = \frac{\delta}{2} \quad u'(h) = u'(-h) = 0 \quad (2.77)$$

où le gradient de  $u(x)$  s'écrit :

$$u'(x) = \frac{C_1}{\omega} \sinh(\omega x) + \frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega x) + C_3 \quad (2.78)$$

$\Rightarrow$

$$u'(h) = \frac{C_1}{\omega} \sinh(\omega h) + \frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega h) + C_3 = 0 \quad (2.79)$$

$$u'(-h) = -\frac{C_1}{\omega} \sinh(\omega h) + \frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega h) + C_3 = 0 \quad (2.80)$$

A partir des conditions aux limites de  $u'(x)$ , les relations suivantes sont obtenues :

$$C_1 = 0 \quad C_3 = -\frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega h) \quad (2.81)$$

les coefficients sont après totalement définis grâce à (2.77) :

$$C_4 = 0 \quad C_2 = \frac{\delta}{2 \left[ \frac{\sinh(\omega h)}{\omega^2} - \frac{h}{\omega} \cosh(\omega h) \right]} \quad (2.82)$$

Donc :

$$u(x) = \frac{\delta}{2\omega^2 \left[ \frac{\sinh(\omega h)}{\omega^2} - \frac{h}{\omega} \cosh(\omega h) \right]} \sinh(\omega x) - \frac{C_2}{\omega} \cosh(\omega h)x \quad (2.83)$$

La figure 2.4 montre les fonctions de  $\underline{u}$  et de  $\underline{u} \otimes \nabla$ .

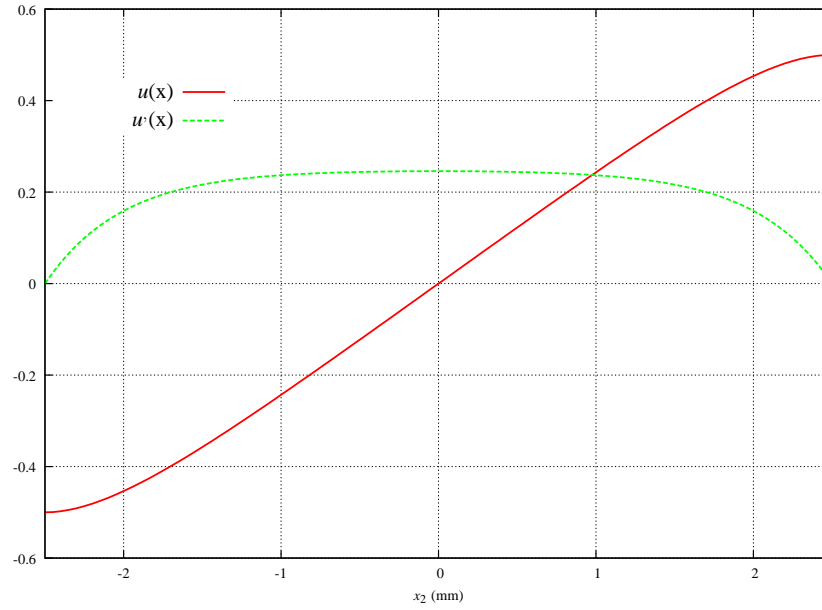


FIG. 2.4 – Déplacement et sa dérivée pour un essai de double cisaillement d'un milieu orthotrope du second gradient. Les propriétés du matériau :  $C_{1212} = 50000$  MPa;  $A_{122122} = 12000$  MPamm<sup>2</sup>.

Degrés de liberté	$\underline{u}, \quad \underline{\chi}$
Mesures de déformation	$\underline{u} \otimes \nabla$ $\underline{e} = \underline{u} \otimes \nabla - \underline{\chi}$ $\underline{K} = \underline{\chi} \otimes \nabla$
Equations d'équilibre (en l'absence d'efforts volumiques)	$(\underline{\sigma} + \underline{s}).\nabla = 0$ $\underline{S}.\nabla + \underline{s} = 0$

TAB. 2.1 – Quelques points essentiels du milieu micromorphe

### 2.2.3 Approche par le milieu micromorphe

Quelques points essentiels du milieu micromorphe sont d'abord présentés dans le tableau 2.1. On cherche une solution pour le déplacement  $\underline{u}$  et la micro-déformation  $\underline{\chi}$  sous la forme :

$$\underline{u} = u(x_2)\underline{e}_1 \quad (2.84)$$

$$\underline{\chi} = \underline{\chi}(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & \chi_{12} \\ \chi_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

A partir de (2.84) et (2.85), nous calculons des mesures de déformation ainsi que les contraintes supérieures :

$$\underline{u} \otimes \nabla = \begin{pmatrix} 0 & u' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

$$\Rightarrow \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & u' \\ u' & 0 \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

$$\underline{e} = \underline{u} \otimes \nabla - \underline{\chi} = u'\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 - \chi_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_{12} + u' \\ -\chi_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

$$\underline{K} = \chi \otimes \nabla = \chi'_{12}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \chi'_{21}\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \quad (2.89)$$

où  $u' = \frac{\delta u}{\delta x_2}$ . Sous la forme d'un vecteur, le tenseur  $\underline{K}$  s'écrit comme dans (2.90), où  $\chi'_{12} = K_{122} = K_2$ ,  $\chi'_{21} = K_{212} = K_3$  :

$$\begin{bmatrix} S_{111} \\ S_{122} \\ S_{212} \\ S_{221} \\ S_{112} \\ S_{121} \\ S_{211} \\ S_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & 0 \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{33}^b & A_{14}^b & A_{23}^b & A_{13}^b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{14}^b & A_{44}^b & A_{24}^b & A_{34}^b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{23}^b & A_{24}^b & A_{22}^b & A_{12}^b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13}^b & A_{34}^b & A_{12}^b & A_{11}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{111} \\ K_{122} \\ K_{212} \\ K_{221} \\ K_{112} \\ K_{121} \\ K_{211} \\ K_{222} \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Les lois de comportement élastique dans le milieu micromorphe : (*sans compte du couplage entre  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{e}$  et  $\underline{K}$  car la structure est centro-symétrique*)

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon} \quad (2.91)$$

$$\underline{s} = \underline{\underline{B}} : \underline{e} \quad (2.92)$$

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{K}} \quad (2.93)$$

où  $\underset{\approx}{C}$ ,  $\underset{\approx}{B}$  et  $\underset{\approx}{A}$  sont des tenseurs symétriques (symétries majeures uniquement). Ces relations tensorielles sont concrétisées comme suivant :

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2C_{1212}\varepsilon_{12} = C_{1212}u' \quad (2.94)$$

$$s_{12} = B_{1212}e_{12} + B_{1221}e_{21} = B_{1212}(u' - \chi_{12}) + B_{1221}(-\chi_{21}) \quad (2.95)$$

$$s_{21} = B_{2112}e_{12} + B_{2121}e_{21} = B_{2112}(u' - \chi_{12}) + B_{2121}(-\chi_{21}) \quad (2.96)$$

$$S_{122} = A_{22}K_2 + A_{23}K_3 = A_{22}\chi'_{12} + A_{23}\chi'_{21} \quad (2.97)$$

$$S_{212} = A_{23}K_2 + A_{33}K_3 = A_{23}\chi'_{12} + A_{33}\chi'_{21} \quad (2.98)$$

Remplacer les contraintes (2.98) dans les équations d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + s_{ij,j} = 0 \quad s_{ij} + S_{ijk,k} = 0 \quad (2.99)$$

$$\Longleftrightarrow \sigma_{12,2} + s_{12,2} = 0 \quad (2.100)$$

$$s_{11} + S_{112,2} = 0 \quad (2.101)$$

$$s_{22} + S_{222,2} = 0 \quad (2.102)$$

$$s_{12} + S_{122,2} = 0 \quad (2.103)$$

$$s_{21} + S_{212,2} = 0 \quad (2.104)$$

où  $s_{11} = s_{22} = 0$   $S_{112} = S_{222} = 0$ , nous obtenons donc trois équations différentielles :

$$B_{1212}(u'' - \chi'_{12}) + B_{1221}(-\chi'_{21}) + C_{1212}u'' = 0 \quad (2.105)$$

$$B_{1212}(u' - \chi_{12}) + B_{1221}(-\chi_{21}) + A_{22}K'_2 + A_{23}K'_3 = 0 \quad (2.106)$$

$$B_{2121}(-\chi_{21}) + B_{2112}(u' - \chi_{12}) + A_{23}K'_2 + A_{33}K'_3 = 0 \quad (2.107)$$

$\Longleftrightarrow$

$$(C_{1212} + B_{1212})u'' = B_{1212}\chi'_{12} + B_{1221}\chi'_{21} \quad (2.108)$$

$$B_{1212}u' = B_{1212}\chi_{12} + B_{1221}\chi_{21} - A_{22}\chi''_{12} - A_{23}\chi''_{21} \quad (2.109)$$

$$B_{2112}u' = B_{2112}\chi_{12} + B_{2121}\chi_{21} - A_{23}\chi''_{12} - A_{33}\chi''_{21} \quad (2.110)$$

(2.108), (2.109), (2.110)  $\implies$

$$u'' = \frac{B_{1212}}{C_{1212} + B_{1212}}\chi'_{12} + \frac{B_{1221}}{C_{1212} + B_{1212}}\chi'_{21} \quad (2.111)$$

$$u'' = \chi'_{12} + \frac{B_{1221}}{B_{1212}}\chi'_{21} - \frac{A_{22}}{B_{1212}}\chi'''_{12} - \frac{A_{23}}{B_{1212}}\chi'''_{21} \quad (2.112)$$

$$u'' = \chi'_{12} + \frac{B_{2121}}{B_{2112}}\chi'_{21} - \frac{A_{23}}{B_{2112}}\chi'''_{12} - \frac{A_{33}}{B_{2112}}\chi'''_{21} \quad (2.113)$$

La soustraction (2.111) -(2.112) conduit à

$$-\frac{C_{1212}}{C_{1212} + B_{1212}}\chi'_{12} + \left( \frac{B_{1221}}{C_{1212} + B_{1212}} - \frac{B_{1221}}{B_{1212}} \right) \chi'_{21} + \frac{A_{22}}{B_{1212}}\chi'''_{12} + \frac{A_{23}}{B_{1212}}\chi'''_{21} = 0 \quad (2.114)$$

La soustraction (2.111) -(2.113) conduit à

$$-\frac{C_{1212}}{C_{1212} + B_{1212}}\chi'_{12} + \left( \frac{B_{1221}}{C_{1212} + B_{1212}} - \frac{B_{2121}}{B_{2112}} \right) \chi'_{21} + \frac{A_{23}}{B_{2112}}\chi'''_{12} + \frac{A_{33}}{B_{2112}}\chi'''_{21} = 0 \quad (2.115)$$



Nous introduisons les constantes :

$$\alpha_1 := -\frac{C_{1212}}{C_{1212} + B_{1212}} \quad \alpha_2 := \frac{A_{22}}{B_{1212}} \quad \alpha_3 := \frac{A_{23}}{B_{2112}} \quad (2.116)$$

$$\beta_1 := \left( \frac{B_{1221}}{C_{1212} + B_{1212}} - \frac{B_{1221}}{B_{1212}} \right) \quad \beta_2 := \frac{A_{23}}{B_{1212}} \quad \beta_3 := \left( \frac{B_{1221}}{C_{1212} + B_{1212}} - \frac{B_{2121}}{B_{2112}} \right) \quad \beta_4 := \frac{A_{33}}{B_{2112}} \quad (2.117)$$

Les équations différentielles (2.114) et (2.115) deviennent un système d'équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \alpha_1 \chi'_{12} + \alpha_2 \chi'''_{12} + \beta_1 \chi'_{21} + \beta_2 \chi'''_{21} = 0 \\ \alpha_1 \chi'_{12} + \alpha_3 \chi'''_{12} + \beta_3 \chi'_{21} + \beta_4 \chi'''_{21} = 0 \end{cases} \quad (2.118)$$

En posant  $\xi_1 = \chi'_{12}$   $\xi_2 = \chi'_{21}$ , nous pouvons mettre ce système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} & \beta_1 + \beta_2 \frac{d^2}{dx^2} \\ \alpha_1 + \alpha_3 \frac{d^2}{dx^2} & \beta_3 + \beta_4 \frac{d^2}{dx^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.119)$$

où  $\frac{d^2}{dx^2}$  est un opérateur de dérivée d'ordre 2. Cette équation a toujours la solution triviale  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  sauf lorsque son déterminant est nul. Par conséquent, nous cherchons :

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} & \beta_1 + \beta_2 \frac{d^2}{dx^2} \\ \alpha_1 + \alpha_3 \frac{d^2}{dx^2} & \beta_3 + \beta_4 \frac{d^2}{dx^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.120)$$

Nous obtenons par exemple pour  $\xi_1$  :

$$\left[ \alpha_1(\beta_3 - \beta_1) + (\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\beta_4 - \beta_1\alpha_3 - \alpha_1\beta_2) \frac{d^2}{dx^2} + (\alpha_2\beta_4 - \beta_2\alpha_3) \frac{d^4}{dx^4} \right] (\xi_1) = 0 \quad (2.121)$$

L'équation :

$$\alpha_1(\beta_3 - \beta_1) + (\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\beta_4 - \beta_1\alpha_3 - \alpha_1\beta_2)t + (\alpha_2\beta_4 - \beta_2\alpha_3)t^2 = 0 \quad (2.122)$$

est mise comme l'équation caractéristique de l'équation (2.121), peut avoir deux solutions complexes ou réelles  $t_1$ ,  $t_2$ . En supposant que les tenseurs d'élasticité sont définis positifs, les solutions sont réelles positives  $0 < t_1 = \omega_1^2 < t_2 = \omega_2^2$ , soit :

$$\begin{cases} B^2 - 4AC \geq 0 \\ \frac{C}{A} \geq 0 \\ -\frac{B}{A} \geq 0 \end{cases} \quad (2.123)$$

où

$$\begin{cases} A = (\alpha_2\beta_4 - \beta_2\alpha_3) \\ B = (\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\beta_4 - \beta_1\alpha_3 - \alpha_1\beta_2) \\ C = \alpha_1(\beta_3 - \beta_1) \end{cases} \quad (2.124)$$

Dans ce cas, la solution d'équation (2.119) est trouvée sous la forme :

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_5 \end{pmatrix} \cosh(\omega_1 x) + \begin{pmatrix} C_2 \\ C_6 \end{pmatrix} \sinh(\omega_1 x) + \begin{pmatrix} C_3 \\ C_7 \end{pmatrix} \cosh(\omega_2 x) + \begin{pmatrix} C_4 \\ C_8 \end{pmatrix} \sinh(\omega_2 x) \quad (2.125)$$

où les constantes  $C_i$  sont à déterminer. Le vecteur  $\underline{\xi}''$  est donc :

$$\underline{\xi}'' = \begin{pmatrix} \xi_1'' \\ \xi_2'' \end{pmatrix} = \omega_1^2 \left[ \begin{pmatrix} C_1 \\ C_5 \end{pmatrix} \cosh(\omega_1 x) + \begin{pmatrix} C_2 \\ C_6 \end{pmatrix} \sinh(\omega_1 x) \right] + \omega_2^2 \left[ \begin{pmatrix} C_3 \\ C_7 \end{pmatrix} \cosh(\omega_2 x) + \begin{pmatrix} C_4 \\ C_8 \end{pmatrix} \sinh(\omega_2 x) \right] \quad (2.126)$$

On remplace  $\underline{\xi}$  dans (2.118), car (2.118) est vérifiée par  $\forall x$ , les coefficients sont ainsi nuls. A partir de cette remarque, les relations entre les constantes sont trouvées :

$$\begin{cases} C_5 = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \omega_1^2}{\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2} C_1 = \tau_1 C_1 \\ C_6 = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \omega_1^2}{\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2} C_2 = \tau_1 C_2 \\ C_7 = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \omega_2^2}{\beta_1 + \beta_2 \omega_2^2} C_3 = \tau_2 C_3 \\ C_8 = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \omega_2^2}{\beta_1 + \beta_2 \omega_2^2} C_4 = \tau_2 C_4 \end{cases} \quad (2.127)$$

A partir des relations ci-dessus, en les combinant avec (2.125), les formulations de  $\chi_{12}$  et  $\chi_{21}$  sont :

$$\chi_{12} = \frac{1}{\omega_1} [C_1 \sinh(\omega_1 x) + C_2 \cosh(\omega_1 x)] + \frac{1}{\omega_2} [C_3 \sinh(\omega_2 x) + C_4 \cosh(\omega_2 x)] + C_9 \quad (2.128)$$

$$\chi_{21} = \frac{\tau_1}{\omega_1} [C_1 \sinh(\omega_1 x) + C_2 \cosh(\omega_1 x)] + \frac{\tau_2}{\omega_2} [C_3 \sinh(\omega_2 x) + C_4 \cosh(\omega_2 x)] + C_{10} \quad (2.129)$$

Il y a 6 constantes à chercher et 4 conditions aux limites. D'autre part, l'équation (2.108) fournit le moyen de calculer  $\underline{u}$  :

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{B_{1212}}{C_{1212} + B_{1212}} \chi'_{12} + \frac{B_{1221}}{C_{1212} + B_{1212}} \chi'_{21} = \eta_1 \chi'_{12} + \eta_2 \chi'_{21} \\ &= (\eta_1 + \eta_2 \tau_1) [C_1 \cosh(\omega_1 x) + C_2 \sinh(\omega_1 x)] + (\eta_1 + \eta_2 \tau_2) [C_3 \cosh(\omega_2 x) + C_4 \sinh(\omega_2 x)] \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\Rightarrow u' = \frac{\eta_1 + \eta_2 \tau_1}{\omega_1} [C_1 \sinh(\omega_1 x) + C_2 \cosh(\omega_1 x)] + \frac{\eta_1 + \eta_2 \tau_2}{\omega_2} [C_3 \sinh(\omega_2 x) + C_4 \cosh(\omega_2 x)] + C_{11} \quad (2.131)$$

$$\Rightarrow u = \frac{\eta_1 + \eta_2 \tau_1}{\omega_1^2} [C_1 \cosh(\omega_1 x) + C_2 \sinh(\omega_1 x)] + \frac{\eta_1 + \eta_2 \tau_2}{\omega_2^2} [C_3 \cosh(\omega_2 x) + C_4 \sinh(\omega_2 x)] + C_{11} x + C_{12} \quad (2.132)$$

Avec deux conditions aux limites  $u(h) = -u(-h) = \frac{\delta}{2}$ , il y a 8 constantes à chercher et 6 équations. Il faut donc considérer aussi les équations (2.109) et (2.110) :

$$u' = \chi_{12} + \frac{B_{1221}}{B_{1212}} \chi_{21} - \frac{A_{22}}{B_{1212}} \chi''_{12} - \frac{A_{23}}{B_{1212}} \chi''_{21} \quad (2.133)$$

$$u' = \chi_{12} + \frac{B_{2121}}{B_{2112}} \chi_{21} - \frac{A_{23}}{B_{2112}} \chi''_{12} - \frac{A_{33}}{B_{2112}} \chi''_{21} \quad (2.134)$$

La soustraction (2.134) - (2.133) permet de trouver :

$$C_{10} = 0 \quad (2.135)$$

La disparition de  $C_{10}$  et la comparaison des termes constants entre les équations (2.134) et (2.131) indique que  $C_9 = C_{11}$ . Ainsi, il ne reste que 6 constantes  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_9, C_{12}$  avec 6 conditions aux limites, concrètement :

$$\frac{1}{\omega_1} [C_1 \sinh(\omega_1 h) + C_2 \cosh(\omega_1 h)] + \frac{1}{\omega_2} [C_3 \sinh(\omega_2 h) + C_4 \cosh(\omega_2 h)] + C_9 = 0 \quad (2.136)$$

$$\frac{1}{\omega_1} [-C_1 \sinh(\omega_1 h) + C_2 \cosh(\omega_1 h)] + \frac{1}{\omega_2} [-C_3 \sinh(\omega_2 h) + C_4 \cosh(\omega_2 h)] + C_9 = 0 \quad (2.137)$$

$$\frac{\tau_1}{\omega_1} [C_1 \sinh(\omega_1 h) + C_2 \cosh(\omega_1 h)] + \frac{\tau_2}{\omega_2} [C_3 \sinh(\omega_2 h) + C_4 \cosh(\omega_2 h)] = 0 \quad (2.138)$$

$$\frac{\tau_1}{\omega_1} [-C_1 \sinh(\omega_1 h) + C_2 \cosh(\omega_1 h)] + \frac{\tau_2}{\omega_2} [-C_3 \sinh(\omega_2 h) + C_4 \cosh(\omega_2 h)] = 0 \quad (2.139)$$

$$\frac{\eta_1 + \eta_2 \tau_1}{\omega_1^2} [C_1 \cosh(\omega_1 h) + C_2 \sinh(\omega_1 h)] + \frac{\eta_1 + \eta_2 \tau_2}{\omega_2^2} [C_3 \cosh(\omega_2 h) + C_4 \sinh(\omega_2 h)] + C_9 h + C_{12} = \frac{\delta}{2} \quad (2.140)$$

$$\frac{\eta_1 + \eta_2 \tau_1}{\omega_1^2} [C_1 \cosh(\omega_1 h) - C_2 \sinh(\omega_1 h)] + \frac{\eta_1 + \eta_2 \tau_2}{\omega_2^2} [C_3 \cosh(\omega_2 h) - C_4 \sinh(\omega_2 h)] - C_9 h + C_{12} = -\frac{\delta}{2} \quad (2.141)$$

Après quelques transformations simples, les constantes sont finalement trouvées :

$$C_1 = C_3 = C_{12} = 0$$

$$C_4 = \frac{\delta}{2 \left[ U^b \sinh(\omega_2 h) - \frac{h \cosh(\omega_2 h)}{\omega_2} - \left( U^a - \frac{h \cosh(\omega_1 h)}{\omega_1} \right) \frac{\tau_2}{\omega_2} \sinh(\omega_2 h) \frac{\omega_1}{\tau_1 \cosh(\omega_1 h)} \right]} \quad (2.142)$$

$$C_2 = -\frac{\tau_2}{\omega_2} \sinh(\omega_2 h) \frac{\omega_1}{\tau_1 \cosh(\omega_1 h)} C_4 \quad (2.143)$$

$$C_9 = -\frac{\cosh(\omega_1 h)}{\omega_1} C_2 - \frac{\cosh(\omega_2 h)}{\omega_2} C_4 \quad (2.144)$$

où  $U^a = \frac{\eta_1 + \eta_2 \tau_1}{\omega_1^2}$  et  $U^b = \frac{\eta_1 + \eta_2 \tau_2}{\omega_2^2}$  Les fonctions analytiques trouvées sont indiquées dans la figure 2.5.

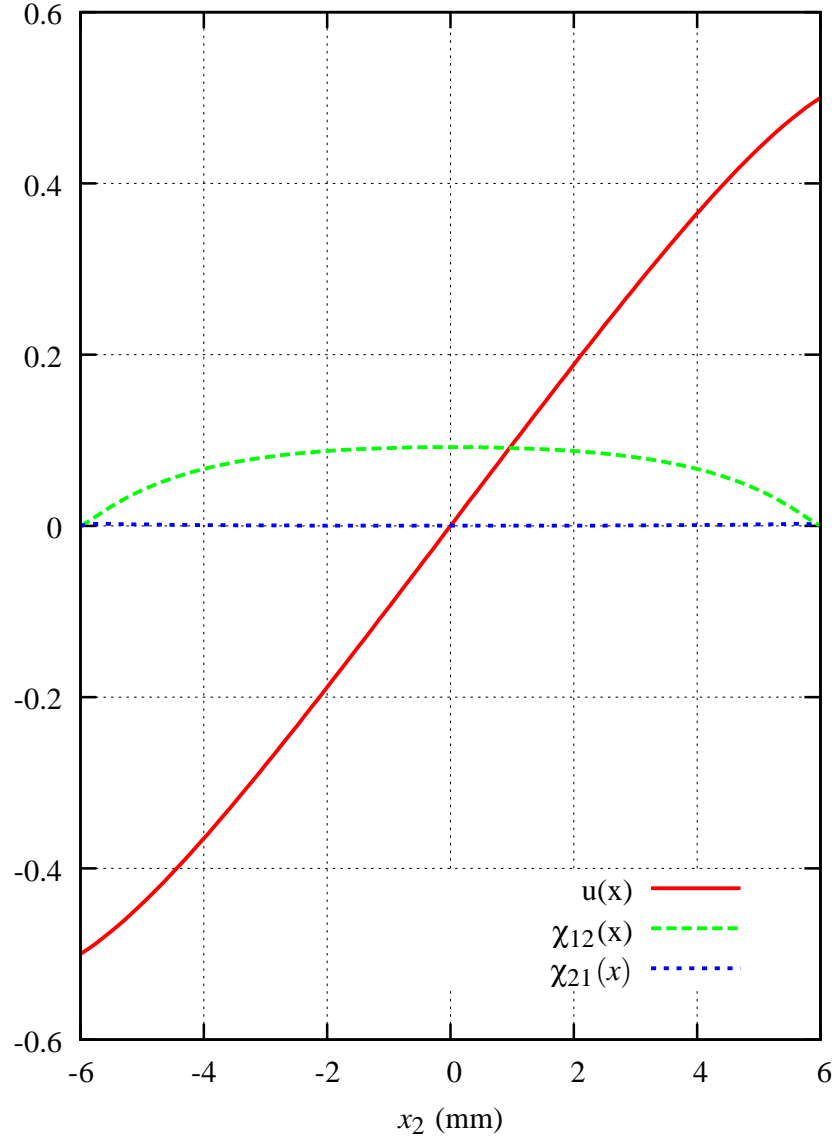


FIG. 2.5 – Les solutions  $u_1(x_2)$ ,  $\chi_{12}$ ,  $\chi_{21}$  du problème de double cisaillement pour un milieu orthotrope micromorphe. Les propriétés du matériau :  $C_{1212} = 15000$  MPa ;  $B_{1212} = 17000$  MPa ;  $B_{1221} = 20000$  MPa ;  $B_{2112} = 16000$  MPa ;  $B_{2121} = 15000$  MPa ;  $A_{22} = 23000$  MPamm<sup>2</sup> ;  $A_{23} = 22000$  MPamm<sup>2</sup> ;  $A_{33} = 21000$  MPamm<sup>2</sup>.

## 2.3 Généralités sur l'homogénéisation

### 2.3.1 VER et propriétés effectives

Pour tous les matériaux, il existe une échelle à partir de laquelle, le matériau est hétérogène. Cependant, aux échelles plus hautes où le calcul de structure se réalise, si toutes les hétérogénéités sont prises en compte, le calcul numérique deviendra trop “coûteux”. Par conséquent, l'homogénéisation multi-échelle est née dans le but de fournir une approche des matériaux hétérogènes par un modèle homogène équivalent, qui diminue significativement le calcul numérique. La méthodologie d'homogénéisation d'après (Bornert et al., 2010) se compose de trois étapes :

- Représentation où un volume élémentaire représentatif (VER), dans lequel les informations de la microstructure sont regroupées, est défini. Dans cette étape, il faut distinguer le triplet microstructure/VER/structure et avoir connaissance de plusieurs longueurs caractéristiques selon (Besson et al., 2009) :
  - la taille des hétérogénéités  $d$  ;
  - la taille  $l$  du VER ;
  - la taille  $L$  de la structure à calculer à l'aide du modèle homogène ;
  - la longueur d'onde  $L_w$  des fluctuations des chargements appliqués à la structure ;
- Localisation, où les champs locaux dans le VER attaché au point matériel considéré sont déterminés en résolvant un problème de micro-mécanique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij} = (u_{i,j})^s \\ \text{lois locales de comportement} \\ \sigma_{ij,j} = 0 \quad \forall x \in V \\ \text{conditions aux limites et initiales} \end{array} \right. \quad (2.145)$$

- Homogénéisation où les propriétés du milieu homogène sont déterminées via une procédure de moyenne sur tout le volume de VER.

$$\langle . \rangle = \frac{1}{V} \int_V (.) dV \quad (2.146)$$

En général, la condition de séparation d'échelle est requise pour l'homogénéisation “classique” comme dans (Sanchez-Palencia and Zaoui, 1987) :

$$d \ll l \ll L, L_w \quad (2.147)$$

Le mot “classique” exprime l'utilisation du modèle de milieu continu de Cauchy comme le modèle homogène équivalent et la procédure d'homogénéisation décrite dans l'ouvrage (Sanchez-Palencia and Zaoui, 1987). Pour cette procédure, plusieurs conditions aux limites sont utilisées, ces conditions donnent sur un même VER différentes *propriétés apparentes*. Mais ces dernières convergent vers des propriétés uniques lorsque que la taille du VER est atteinte. La valeur vers laquelle les propriétés apparentes convergent est nommée *propriété effective*. Dans (Bornert et al., 2010), un exemple de la convergence des propriétés apparentes en fonction de la croissance de la taille de VER est indiquée. Le matériau utilisé dans cette analyse est un composite de type matrice-inclusion dont la microstructure périodique est constituée de plusieurs cellules carrées avec une inclusion ronde comme le montre la figure (2.6). Les deux matériaux constitutifs sont élastiques isotropes avec des modules Young peu contrastés, les valeurs effectives convergent ainsi rapidement comme le montre la figure 2.7.

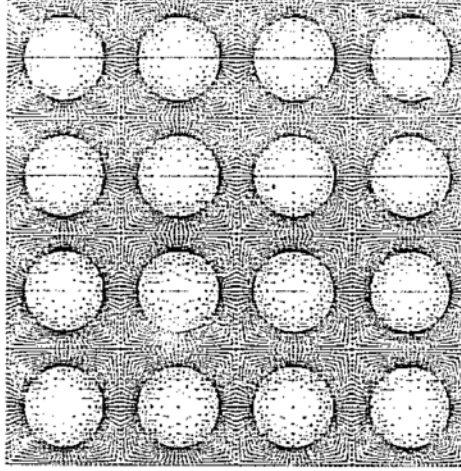


FIG. 2.6 – Le composite périodique présenté dans (Bornert et al., 2010).

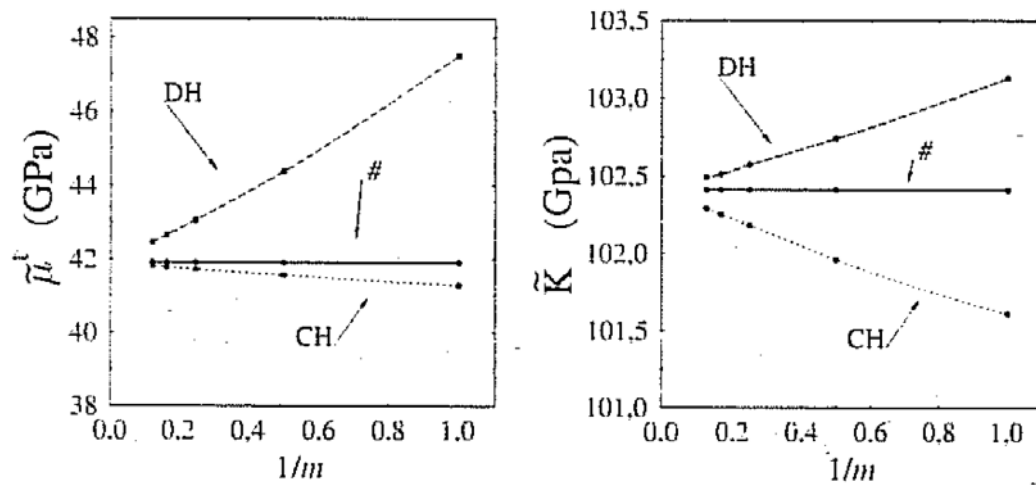


FIG. 2.7 – La convergence des propriétés apparentes vers les propriétés effectives du composite de la figure 2.6 sous plusieurs conditions aux limites : DH–déformation homogène au contour, CH–contrainte homogène au contour, # – conditions périodiques.

### 2.3.2 Conditions aux limites et moyenne des champs locaux

Pour calculer les propriétés effectives de MHE et étudier la convergence des propriétés apparentes, plusieurs conditions aux limites sont utilisées ; Les plus fréquemment utilisées sont les conditions de déformation homogène au contour (KUBC), de contraintes homogènes au contour (SUBC), et les conditions aux limites périodiques qui sont également utilisées dans la figure 2.7<sup>3</sup>. Le corps étudié est  $V$  de bord  $\partial V$ . Ces conditions sont présentées rapidement ici parce qu'elles sont très importantes :

- Conditions de déformation homogène au contour :

$$\underline{u} = \underline{E}^0 . \underline{x} \quad \forall x \in \partial V \quad (2.148)$$

- Conditions de contrainte homogène au contour :

$$\underline{\sigma} . \underline{n} = \underline{\Sigma}^0 . \underline{n} \quad \forall x \in \partial V \quad (2.149)$$

- Conditions aux limites périodiques :

$$\underline{u} = \underline{E}^0 . \underline{x} + \underline{v} \quad \forall x \in \partial V \quad (2.150)$$

où  $\underline{v}$  est périodique sur les deux bords opposés. A cette condition de périodicité de la fluctuation s'ajoute la condition d'anti-périodicité des vecteurs contraintes correspondants.

où les données appliquées sont les tenseurs constants  $\underline{E}^0$  et  $\underline{\Sigma}^0$ .

Après l'étape de localisation des champs locaux en utilisant ces conditions aux limites, une procédure de moyenne est nécessaire pour revenir au niveau global. Les tenseurs globaux de contraintes et de déformations macroscopiques  $\underline{\Sigma}, \underline{E}$  au point matériel en considération sont calculés :

- Contraintes globales :

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}(X) &= \frac{1}{V} \int_V \underline{\sigma}(x) dV \\ \Sigma_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ik} \delta_{kj} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ik} x_{j,k} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ik} x_{j,k} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V (\sigma_{ik} x_j)_{,k} dV - \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ik,k} x_j dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} \sigma_{ik} x_j n_k dS \end{aligned} \quad (2.151)$$

En appliquant la condition de contrainte homogène aux limites :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}(X) &= \Sigma_{ik}^0 \frac{1}{V} \int_{\partial V} x_j n_k dS \\ &= \Sigma_{ik}^0 \frac{1}{V} \int_V x_{j,k} dV \\ &= \Sigma_{ik}^0 \delta_{kj} = \Sigma_{ij}^0 \end{aligned} \quad (2.152)$$

– Déformations globales :

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{E}}(X) &= \frac{1}{V} \int_V \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) dV \\
 E_{ij}(X) &= \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \\
 &= \frac{1}{2V} \int_V (u_{i,j} + u_{j,i}) dV \\
 &= \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (u_i n_j + u_j n_i) dS
 \end{aligned} \tag{2.153}$$

En appliquant la condition de déformation homogène aux limites :

$$\begin{aligned}
 E_{ij} &= \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (E_{ik}^0 x_k n_j + E_{jk}^0 x_k n_i) dS \\
 &= \frac{1}{2V} \int_V (E_{ik}^0 \delta_{kj} + E_{jk}^0 \delta_{ki}) dV \\
 &= E_{ij}^0
 \end{aligned} \tag{2.154}$$

ou en appliquant la condition périodique en déplacement :

$$\begin{aligned}
 E_{ij} &= \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (E_{ik}^0 x_k n_j + E_{jk}^0 x_k n_i) dS + \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (v_i n_j + v_j n_i) dS \\
 &= E_{ij}^0 + \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (v_i n_j + v_j n_i) dS = E_{ij}^0
 \end{aligned} \tag{2.155}$$

car  $\underline{\mathbf{v}}(x) = \underline{\mathbf{v}}(-x) \quad \forall x \in \partial V$ .

Dans cette thèse, nous allons considérer les conditions aux limites précédentes mais aussi nous les étendrons à des conditions non-homogènes qui seront présentées dans le chapitre 4

### 2.3.3 Homogénéisation d'ordre supérieur et conditions aux limites non-homogènes

La théorie d'homogénéisation classique est développée en respectant la condition de *séparation d'échelle* (2.147). Pourtant, cette condition n'est pas vérifiée dans de nombreux cas de matériaux réels : matériaux à gros grains, des matériaux multicouches de type sandwich, et lorsque la longueur caractéristique de sollicitation n'est pas beaucoup plus grande par rapport à l'hétérogénéité du matériau. Afin de trouver un milieu effectif qui peut simuler le comportement global, la méthode d'homogénéisation classique est élargie à l'homogénéisation d'ordre supérieur, où <sup>4</sup>la stratégie d'homogénéisation reste inchangée mais la condition de *séparation d'échelle* n'est plus prise en compte. L'apparition de la méthode d'homogénéisation d'ordre supérieur entraîne l'utilisation des conditions appelées *non-homogènes* aux limites. Ces dernières se basent sur le développement polynomial de Taylor :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{D}} : (\underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}}) + \frac{1}{6} \underline{\mathbf{D}} :: (\underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}}) + \dots \tag{2.156}$$

L'ordre du développement à considérer pour donner une bonne estimation du comportement effectif fait encore l'objet de discussions et il dépend également au modèle de milieu continu choisi comme milieu de substitution. Une présentation plus détaillée de cette nouvelle méthode d'homogénéisation sera mentionnée dans le chapitre 4.

<sup>3</sup>Il faut remarquer que dans la convergence des propriétés effectives, les conditions périodiques aux limites ne dépendent pas de la taille des VEs. Cette stratégie d'homogénéisation reviendra dans le chapitre 4 afin d'examiner les fluctuations aux bords d'une cellule unitaire périodique.

<sup>4</sup>la stratégie d'homogénéisation : attache d'un VER à un point matériel en considération, calcul des champs locaux, détermination des moyennes et des propriétés effectives.



## Chapitre 3

# Eléments bibliographiques

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modélisation des matériaux hétérogènes par le modèle de Cosserat</b>	<b>30</b>
3.1.1	Cinématique . . . . .	30
3.1.2	Identification d'un milieu de substitution de Cosserat au niveau global	31
3.1.3	Exemple d'homogénéisation d'un matériau multi-couches . . . . .	32
<b>3.2</b>	<b>Homogénéiser des matériaux hétérogènes en utilisant le modèle du second gradient comme MHGE . . . . .</b>	<b>33</b>
3.2.1	Cinématique . . . . .	34
3.2.2	Exemples . . . . .	36
3.2.3	Effets de taille . . . . .	37
<b>3.3</b>	<b>La taille du VER dans l'homogénéisation au second ordre . . .</b>	<b>39</b>
3.3.1	Le cas de VER homogène . . . . .	40
3.3.2	Le cas d'un VER hétérogène . . . . .	41
	Comportement élastique linéaire . . . . .	42
	Comportement élasto-plastique . . . . .	42
3.3.3	Problème de cisaillement aux bords . . . . .	42
<b>3.4</b>	<b>Application du modèle à couples de contraintes pour homogénéiser un composite biphasé . . . . .</b>	<b>48</b>
3.4.1	Premiers essais dans (Ostoja-Starzewski et al., 1999a) . . . . .	48
	Cinématique . . . . .	48
	Formulation du problème . . . . .	50
	Résultats numériques . . . . .	51
3.4.2	Les améliorations et développements dans (Bouyge et al., 2001a) . .	53
	Conditions aux limites en déplacement . . . . .	53
	Conditions aux limites périodiques . . . . .	53
	Conditions de contraintes imposées . . . . .	54
	Les essais sur deux VER sous différents chargements . . . . .	54
<b>3.5</b>	<b>Stratégie de modélisation multi-échelles numérique pour le milieu micromorphe . . . . .</b>	<b>58</b>
3.5.1	Cinématique . . . . .	58
	Mesures de déformation . . . . .	59
	Contraintes . . . . .	59
	Energie . . . . .	59
3.5.2	Définition des ddls à partir de la microstructure . . . . .	59
<b>3.6</b>	<b>Méthode de correction des modules homogénéisés d'ordre supérieur . . . . .</b>	<b>61</b>

---

### 3.1 Modélisation des matériaux hétérogènes par le modèle de Cosserat

Très tôt, certains auteurs ont proposé de remplacer un milieu composite par un milieu homogène de Cosserat afin d'améliorer la prévision de la réponse des structures à des sollicitations complexes (Besdo, 1985). Une telle procédure d'homogénéisation systématique a été proposée plus récemment par (Forest and Sab, 1998a). On a chois de commencer par expliciter ces travaux car les développements de ma thèse en constituent une extension. Dans l'homogénéisation classique, un matériau hétérogène dont la micro-structure est périodique, est remplacé par un matériau homogène équivalent. Cependant, cette méthode n'est valable que dans le cas où la taille caractéristique de la micro-structure est très petite devant celle de la structure en considération. Il faut remarquer que le matériau hétérogène et son matériau homogène équivalent sont considérés en tant que milieux classiques autrement dit milieux de Cauchy ou brièvement milieu continu, qui est très connu dans les ouvrages de mécanique. Pour modéliser plus précisément le comportement des matériaux, on a donné autre modèles plus riches en terme de cinématique du point matériel. Dans ces modèles, les degrés de liberté à chaque point sont plus de trois (comme dans le milieu classique). Le nombre des degrés de liberté sont 6, 9, etc en fonction de modèle. Mais il y toujours les 3 ddls du milieu classique (le vecteur de déplacement) et de nouveaux degrés de liberté sont introduits.

Il y a aussi des travaux sur l'homogénéisation dans lesquels le matériau hétérogène initial et le matériau homogènes équivalent final sont tous modélisés par des modèles généralisés. Dans cette thèse, il ne sera pas question de ce type d'approches, cf. (Forest et al., 2001). Dans la référence (Forest and Sab, 1998a), les auteurs émettent l'idée de remplacer un matériau hétérogène qui est considéré comme un milieu classique, par un matériau équivalent qui est modélisé par un modèle de Cosserat. Pour bien illustrer leur idée, ils donnent un exemple de l'homogénéisation d'un matériau sandwich dont le cœur est beaucoup plus raide que les peaux. De plus, pour simplifier le problème, le schéma de l'homogénéisation est donné sur un problème plan. Nous détaillons cette approche dans la suite.

#### 3.1.1 Cinématique

L'objet de l'article est de remplacer un matériau composite au niveau local par un *matériau homogène généralisé équivalent* (MHGE). Le modèle de remplacement choisi est celui de Cosserat homogène. Le matériau hétérogène est modélisé de façon classique avec toutes ses hétérogénéités au niveau local. Les degrés de liberté (ddls) connus dans la mécanique des milieux continus sont :  $\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2$  dans le cadre des problèmes 2D. Ces ddls existent aussi dans le modèle de Cosserat à côté des nouveaux degrés de liberté :  $\underline{\Phi} = \Phi_3 \underline{e}_3$  qui désigne la micro-rotation du point matériel, une seule composante en 2D. Pour remplacer le matériau composite par un MHGE de Cosserat, il faut trouver la relation entre les nouveaux ddls du matériau généralisé et les ddls classiques du milieu hétérogène. Le principe pour résoudre ce problème est de minimiser l'écart entre les champs locaux et globaux. Il se transforme en un problème de minimisation de l'intégrale :

$$\int_{x_1=X_1-\frac{l}{2}}^{x_1=X_1+\frac{l}{2}} \int_{x_2=X_2-\frac{l}{2}}^{x_2=X_2+\frac{l}{2}} | \underline{u}(\underline{x}) - \underline{U}(\underline{X}) - \underline{\Phi}(\underline{X}) \otimes (\underline{x} - \underline{X}) |^2 dx_1 dx_2 \quad (3.1)$$

où la cellule élémentaire,  $V_l$ , du matériau considéré comme périodique est supposée carrée de côté  $l$ . Cette formule indique que l'on approche le champ réel local dans la cellule,  $\underline{u}(\underline{x})$  par un mouvement de corps rigide caractérisé par le déplacement macroscopique  $\underline{U}$  et la rotation infinitésimale  $\underline{\Phi}$  autour du centre de la cellule  $\underline{X}$ .

Les calculs simples nous donnent :

$$\begin{aligned}
 \underline{U}(\underline{X}) &= \langle \underline{u} \rangle_{V_l(\underline{X})} \\
 \nabla_X \underline{U}(\underline{X}) &= \langle \nabla_x \underline{u} \rangle_{V_l(\underline{X})} \\
 \Phi(\underline{X}) &= \frac{6}{l^2} \langle (\underline{x} - \underline{X}) \otimes \underline{u} \rangle_{V_l(\underline{X})} \\
 \underline{K} &= \nabla \Phi \\
 &= \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} \underline{e}_2 = \frac{6}{l^2} \langle \nabla_x ((\underline{x} \otimes \underline{u}) \cdot \underline{e}_3) \rangle_{V_l(\underline{X})} - \frac{6}{l^2} \nabla_X ((\underline{X} \otimes \underline{U}) \cdot \underline{e}_3)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

et les champs de déformation :

$$\begin{aligned}
 \underline{\varepsilon}(\underline{x}) &= \frac{1}{2} (\nabla_x \underline{u} + \nabla_x^t \underline{u})(\underline{x}) \\
 \underline{E}(\underline{X}) &= \frac{1}{2} (\nabla_X \underline{U} + \nabla_X^t \underline{U})(\underline{X}) \\
 \underline{\Omega} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_2}{\partial X_1} - \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \underline{e}_3 \right) = \Omega(\underline{X}) \underline{e}_3
 \end{aligned}$$

On voit que le déplacement macroscopique est la moyenne de déplacements sur la cellule élémentaire. La rotation de Cosserat est définie comme un moment de la distribution de déplacements dans la cellule. C'est une information indépendante de la moyenne de déplacement et non prise en compte en homogénéisation classique.

Nous étudions le cas d'un champ de déplacement polynomial d'ordre 3 par rapport aux variables  $\tilde{x} = x/l$  :

$$u_i = A_i + B_{i1}\tilde{x}_1 + B_{i2}\tilde{x}_2 + C_{i1}\tilde{x}_1^2 + C_{i2}\tilde{x}_2^2 + 2C_{i2}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + D_{i1}\tilde{x}_1^3 + D_{i2}\tilde{x}_2^3 + 3D_{i3}\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 + 3D_{i4}\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 \quad (3.3)$$

Sous les conditions :

- $\Phi$  est affine par rapport à  $\underline{X}$
- $\underline{E}(X) = \langle \underline{\varepsilon} \rangle_{V_l}$  est en ordre 2. Cette condition est appelée la condition de l'invariance d'échelle.

L'expression du triplet est obtenue :

$$\begin{aligned}
 - \underline{E}(X) &= \langle \underline{\varepsilon}(X) \rangle_{V_l} \\
 - (\Phi - \Omega)(X) &= \frac{D_{12}}{10l} \\
 - \underline{K}(X) &= \frac{C_{21} - C_{13}}{l^2} \underline{e}_1 + \frac{C_{23} - C_{12}}{l^2} \underline{e}_2
 \end{aligned}$$

Dans ces expressions du triplet ( $\underline{E}$ ,  $\underline{\Omega}$ ,  $\underline{\Phi}$ ,  $\underline{K}$ ), les constantes dans l'expression de déplacement (3.3) ne sont pas toutes prises, autrement dit, elles sont indéterminées après l'application de condition de l'invariance d'échelle. Par conséquent, le champ de déplacement se réduit (Forest and Sab, 1998a) :

$$\begin{aligned}
 u_1^* &= B_{11}\tilde{x}_1 + B_{12}\tilde{x}_2 - C_{23}\tilde{x}_2^2 + 2C_{13}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + D_{12}(\tilde{x}_2^3 - 3\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2). \\
 u_2^* &= B_{12}\tilde{x}_1 + B_{22}\tilde{x}_2 - C_{13}\tilde{x}_1^2 + 2C_{23}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - D_{12}(\tilde{x}_1^3 - 3\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

### 3.1.2 Identification d'un milieu de substitution de Cosserat au niveau global

Dans l'homogénéisation classique, si nous prenons  $\underline{c}$  comme le tenseur d'élasticité locale, le tenseur des propriétés élastiques effectives  $\underline{C}$  est déterminé par l'équivalence énergétique, comme suit :

$$\frac{1}{2} \underline{E} : \underline{C} : \underline{E} = \min \frac{1}{2} \langle \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{c}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \rangle$$

avec  $\underline{\mathbf{u}}$  est défini comme dans la suite :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{E}}.\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{u}}^{per}(\underline{\mathbf{x}})$$

Cette définition est étendue pour le cas de milieu de substitution de Cosserat :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}^* + \underline{\mathbf{u}}^{per} \quad (3.5)$$

avec  $\underline{\mathbf{u}}^*$  est le champ de déplacement dans la formulation (3.4) et  $\underline{\mathbf{u}}^{per}$  est la fluctuation périodique. Nous avons des relations établies précédemment entre les ddls macroscopiques et les coefficients de la condition polynomiale :

$$\begin{aligned} B_{ij} &= lE_{ij}^* \\ \Theta^* &= \frac{D_{12}}{10l} + \frac{6}{l^2} \langle \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{u}}^{per} \rangle \\ K_1^* &= -\frac{2C_{13}}{l^2} + \frac{6}{l^2} \langle x_1 u_{2,1}^{per} \rangle \\ K_2^* &= \frac{2C_{23}}{l^2} - \frac{6}{l^2} \langle x_2 u_{1,2}^{per} \rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

La densité d'énergie de milieu Cosserat est donc :

$$\Psi(\underline{\mathbf{E}}^*, \Theta^*, K^*) = \min \frac{1}{2} \langle \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}) : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}) \rangle \quad (3.7)$$

avec  $\underline{\mathbf{u}}$  de la forme (3.5)

Enfin, pour trouver les propriétés élastiques effectives de milieu Cosserat, nous appliquons le schéma suivant :

- Le champ de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}^*$  décrit dans la formulation (3.4) est choisi.
- La procédure de minimization de l'énergie comme dans la formulation (3.7) est réalisée pour obtenir le champ de fluctuation  $\underline{\mathbf{u}}^{per}$ .
- Avec le champ de  $\underline{\mathbf{u}}^{per}$  obtenu, le triplet caractéristique  $(\underline{\mathbf{E}}^*, \Theta^*, K^*)$  du milieu de Cosserat est calculé suivant la formulation (3.6).
- Puis, les contraintes d'ordre supérieur sont calculées par la différenciation de l'énergie  $\Psi$  dans la formulation (3.7) en fonction de  $(\underline{\mathbf{E}}^*, \Theta^*, K^*)$ .
- Le tenseur  $\underline{\mathbf{C}}$  est ainsi reproduit à partir des forces globales, les couples-contraintes et le triplet  $(\underline{\mathbf{E}}^*, \Theta^*, K^*)$ .

Ce schéma est illustré dans l'exemple de l'article.

### 3.1.3 Exemple d'homogénéisation d'un matériau multi-couches

Un matériau multi-couches est pris comme exemple de la méthodologie dans la référence (Forest and Sab, 1998a). Il est constitué de deux matériaux :  $A$  est rigide et  $B$  est beaucoup plus mou avec les propriétés élastiques suivantes :

$$E^A = 210000 \text{ MPa} \quad \nu^A = 0.3 \quad E^B = 1000 \text{ MPa} \quad \nu^B = 0.49$$

La fraction volumique de chaque composante est 50%. Il faut remplacer ce matériau hétérogène par un matériau homogène de Cosserat suivant le schéma précédent. Une procédure d'homogénéisation classique est aussi réalisée pour comparer l'efficacité des deux méthodes. Une structure multicouche soumise à un déplacement vertical à une extrémité et encastrée à l'autre est considérée. Les calculs de détermination du triplet sont réalisés sur une seule cellule avec l'application successive des termes du champ de déplacement (3.4). Le résultat est montré dans la figure 3.1

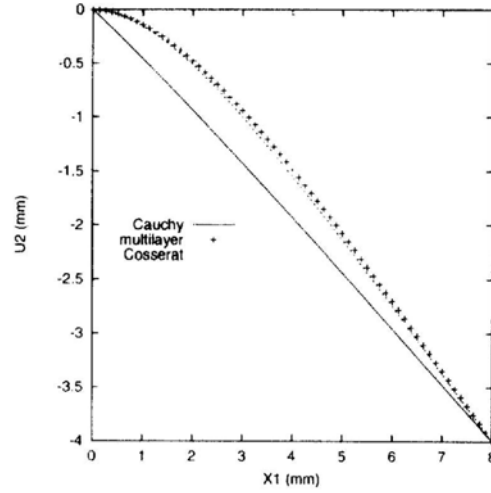


FIG. 3.1 – Comparaison entre les deux méthodes d’homogénéisation avec le calcul de référence dans l’article (Forest and Sab, 1998a)

### 3.2 Homogénéiser des matériaux hétérogènes en utilisant le modèle du second gradient comme MHGE

Nous nous intéressons ici à la contribution (Kouznetsova et al., 2002a). Pour commencer l’article, l’auteur a mentionné plusieurs méthodes d’homogénéisation et cite les points forts de la méthode d’homogénéisation basée sur des calculs élémentaires sur une cellule unitaire de milieu périodique :

- Ne pas demander une hypothèse préalable de la loi globale de comportement.
- Permettre d’intégrer les grandes déformations à tous les deux niveaux : microscopique et macroscopique.
- Permettre de prendre en compte n’importe quel comportement local du matériau, y compris les réponses non-linéaires ou dépendantes du temps.
- Etre capable d’introduire les informations détaillées sur la microstructure, inclus les évolutions géométriques et physiques de la micro-structure pour l’analyse macroscopique.
- Autoriser l’usage d’une technique quelconque de modélisation, *e.g* éléments finis, transformées de Fourier, méthodes de cellule Voronoi...

Les points faibles des techniques d’homogénéisation classique sont également montrés :

- Elle ne prend pas en compte de la taille absolue de la microstructure bien qu’elle prenne en compte la fraction volumique, la distribution et la morphologie des composantes microscopiques.
- Il est impossible d’appliquer cette méthode sans imposer l’hypothèse de séparation d’échelle. Cette dernière ne se présente pas dans de nombreux matériaux, comme indiqué dans l’article (Boutin, 1996a).

L’article mentionne également la comparaison entre deux schémas de l’homogénéisation : classique et second-ordre. Ils sont illustrés comme l’indique la figure 3.2, avec  $M, m$  désignant successivement l’échelle macroscopique et microscopique ;  $\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{P}}, \underline{\underline{Q}}$  désignent successivement le tenseur de déformation et le tenseur d’ordre 3 du gradient de déformation, le premier tenseur des contraintes Piola-Kirchoff et le tenseur des contraintes à l’ordre supérieur.

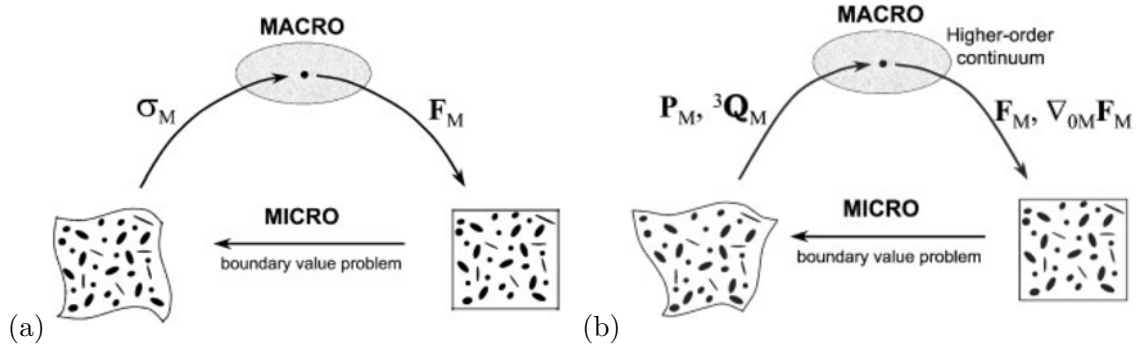


FIG. 3.2 – Schéma de l'homogénéisation classique (premier ordre) (a) Schéma de l'homogénéisation second-ordre(b)

### 3.2.1 Cinématique

La cinématique micro-macro est établie pour l'homogénéisation d'ordre supérieur. Le point de départ est l'extension du développement de Taylor :

$$\Delta \underline{x} = \underline{\tilde{\mathbf{F}}}_M \cdot \Delta \underline{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \Delta \underline{\mathbf{X}} \cdot \underline{\tilde{\mathbf{G}}}_M \cdot \Delta \underline{\mathbf{X}} + \Delta \underline{w} \quad (3.8)$$

où le  $w$  représente le champ de perturbation microscopique, ajouté dans cette formulation afin de prendre en compte le champ de déplacement local qui est superposé sur le champ de déplacement global. A partir de (3.8), le gradient local de la transformation  $\underline{\tilde{\mathbf{F}}}_m$  est calculé :

$$\underline{\tilde{\mathbf{F}}}_m = \underline{\tilde{\mathbf{F}}}_M + \Delta \underline{\mathbf{X}} \cdot \underline{\tilde{\mathbf{G}}}_M + \nabla_m \Delta \underline{w} \quad (3.9)$$

Intégrons sur toute la cellule non déformée de VER et divisons par le volume  $V_0$  de cette cellule la formulation (3.9), une égalité est obtenue :

$$\frac{1}{V_0} \int_{V_0} \underline{\tilde{\mathbf{F}}}_m dV_0 = \underline{\tilde{\mathbf{F}}}_M + \left( \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \Delta \underline{\mathbf{X}} \right) dV_0 \cdot \underline{\tilde{\mathbf{G}}}_M + \frac{1}{V_0} \int_{V_0} (\nabla_m \Delta \underline{w}) dV_0 \quad (3.10)$$

Une hypothèse fondamentale de la théorie d'homogénéisation classique est appliquée ensuite :

$$\underline{\tilde{\mathbf{F}}}_M = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \underline{\tilde{\mathbf{F}}}_m dV_0 \quad (3.11)$$

Son application sur la formulation (3.10) mène à deux égalités en même temps :

$$\left( \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \Delta \underline{\mathbf{X}} \right) dV_0 = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{V_0} \int_{V_0} (\nabla_m \Delta \underline{w}) dV_0 = 0 = \frac{1}{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \Delta \underline{w} \cdot \underline{n} d\Gamma_0 = 0 \quad (3.13)$$

où le théorème de divergence a été utilisé pour transformer l'intégrale volumique en intégrale surfacique. La relation (3.12) est facilement satisfaite en mettant le centre géométrique du VER non-déformé à l'origine de la base cartésienne. Du point de vue physique, le centre de VER est considéré comme le point macroscopique où le  $\underline{\tilde{\mathbf{F}}}_M$  et son gradient  $\underline{\tilde{\mathbf{G}}}_M$  sont calculés. Le reste du VER est la proximité infiniment petite attachée à ce point. L'égalité (3.12) signifie simplement que la contribution des points, dont les distances avec le centre

sont égales, est uniformément pris en compte. Il faut noter aussi que dans l'homogénéisation classique, le VER est considéré infiniment petit. Pour cette raison, les distances au centre ne jouent aucun rôle. Ainsi, l'expression (3.12) n'est pas requise. Par contre, la relation (3.13) est plus compliquée et demande des considérations supplémentaires. En fait, il y a plusieurs façons de remplir cette condition. Trois moyens principaux sont souvent utilisés :

- $\Delta \underline{\mathbf{w}} = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{X}} \in V_0$ . Cette hypothèse (connue dans l'homogénéisation classique comme l'hypothèse de Taylor), ne permet aucune perturbation microscopique et force le volume entier à se déformer exactement comme le  $\underline{\mathbf{F}}_M$  et le  $\underline{\mathbf{G}}_M$  appliqués.
- $\Delta \underline{\mathbf{w}} = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{X}} \in \Gamma_0$ . Cette condition prescrit le déplacement sur la frontière de VER, tandis qu'elle laisse libres les perturbations microscopiques à l'intérieur. C'est la condition KUBC (Kinematic uniform boundary condition) dans l'homogénéisation classique.
- $\Delta \underline{\mathbf{w}}$  prend des valeurs égales aux points homologues de deux côtés opposés. Cette condition est dite condition périodique.

Dans cet article, la supposition périodique est utilisée parce que dans plusieurs recherches (Terada et al., 2000; van der Sluis et al., 2000), la perturbation périodique montre une meilleure estimation des propriétés globales que le KUBC. Il faut noter que dans le cas général, nous montrerons dans notre thèse que le gradient de déformation  $\underline{\mathbf{G}}_M \neq 0$ , peut mener à une fluctuation non-périodique, mais nous en restons ici à ma présentation des contributions de la littérature. Dans la suite de cette section, la cinématique du VER carré dans la figure 3.2 est considérée où les majuscules  $L, R, T, B$  désignent les côtés à gauche, à droite, en haut et en bas ; les vecteurs  $\underline{\mathbf{N}}_i$  signifient les vecteurs normaux des côtés du VER ; les  $\xi, \eta$  sont les coordonnées locales dans le calcul par élément finis.

Appliquons l'équation (3.8) aux côtés gauche et droit de la cellule, en prenant en compte la condition périodique, qui est précisée dans le cas d'un VER carré avec  $s$  comme coordonnée locale :

$$\Delta \underline{\mathbf{w}}_L(s) = \Delta \underline{\mathbf{w}}_R(s), \quad \Delta \underline{\mathbf{w}}_T(s) = \Delta \underline{\mathbf{w}}_B(s) \quad (3.14)$$

et une relation cinématique est obtenue :

$$\underline{\mathbf{x}}_R = \underline{\mathbf{x}}_L + \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{X}}_L + \underline{\mathbf{a}} \quad (3.15)$$

où :

$$\underline{\mathbf{A}} = W \underline{\mathbf{N}}_R \cdot \underline{\mathbf{G}}_M, \quad \underline{\mathbf{a}} = W \underline{\mathbf{F}}_M \cdot \underline{\mathbf{N}}_R + \frac{W^2}{2} \underline{\mathbf{N}}_R \cdot \underline{\mathbf{G}}_M \cdot \underline{\mathbf{N}}_R \quad (3.16)$$

Après des calculs tensoriels, les relations entre les champs macroscopiques et les champs microscopiques sont trouvées :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_M &= \langle \underline{\mathbf{F}}_m \rangle \\ \underline{\mathbf{G}}_M + \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{I}} : \underline{\mathbf{G}}_M^{RC})^{RC} &= \frac{6}{V_0 W^2} \left\{ \int_{\Gamma_0} (\underline{\mathbf{X}} \Delta \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{N}} + \underline{\mathbf{N}} \Delta \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{X}}) d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} (\underline{\mathbf{X}} \Delta \underline{\mathbf{w}} \underline{\mathbf{N}} + \underline{\mathbf{N}} \Delta \underline{\mathbf{w}} \underline{\mathbf{X}}) d\Gamma_0 \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

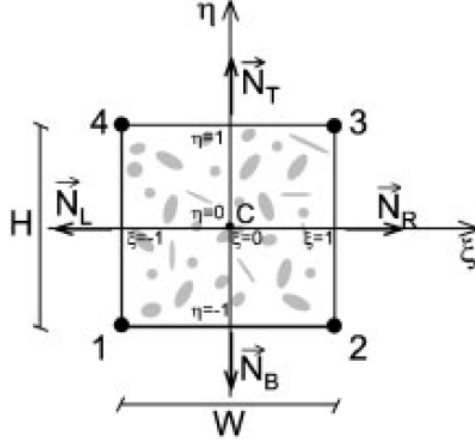
où  $\underline{\mathbf{I}}$  est tenseur unitaire d'ordre 2,  $\underline{\mathbf{G}}_M^{RC}$  (Right Conjugation) se compose de :  $G_{ijk}^{RC} = G_{ikj}$ . Elle mène ensuite à une nouvelle restriction :

$$\int_{\Gamma_0} (\underline{\mathbf{X}} \Delta \underline{\mathbf{w}} \underline{\mathbf{N}} + \underline{\mathbf{N}} \Delta \underline{\mathbf{w}} \underline{\mathbf{X}}) d\Gamma_0 = \underline{\mathbf{0}} \quad (3.18)$$

Cette restriction et la condition périodique (3.14) sont vérifiées en même temps si (3.18) réduit à :

$$\int_{\Gamma_{0L}} \Delta \underline{\mathbf{w}}_L d\Gamma_0 = \underline{\mathbf{0}}, \quad \int_{\Gamma_{0B}} \Delta \underline{\mathbf{w}}_B d\Gamma_0 = \underline{\mathbf{0}} \quad (3.19)$$

Enfin, l'expression est généralisée et cela donne des conditions aux limites supplémentaires, dans le cas de VER carré :

FIG. 3.3 – VER carré :  $W = H$ 

- La perturbation du déplacement aux quatres coins est fixée à zéro.
- La perturbation périodique est assurée sur les côtés opposés.

$$\underline{u}_R = \underline{u}_L + \frac{1}{2}(1 - \eta)(\underline{u}_2 - \underline{u}_1) + \frac{1}{2}(1 + \eta)(\underline{u}_3 - \underline{u}_4) \quad (3.20)$$

$$\underline{u}_T = \underline{u}_B + \frac{1}{2}(1 - \xi)(\underline{u}_4 - \underline{u}_1) + \frac{1}{2}(1 + \xi)(\underline{u}_3 - \underline{u}_2) \quad (3.21)$$

- L'intégrale (3.19) sur la perturbation aux deux bords de la cellule est nulle. (3.19) se transforme par le vecteur de position déformée des points aux bords :

$$\int_{\Gamma_{OL}} \Delta \underline{x}_L d\Gamma_O = \underline{F}_M \cdot \int_{\Gamma_{OL}} \underline{X}_L d\Gamma_O + \frac{1}{2} \underline{G}_M^{RC} : \int_{\Gamma_{OL}} \underline{X}_L \otimes \underline{X}_L d\Gamma_O \quad (3.22)$$

$$\int_{\Gamma_{OB}} \Delta \underline{x}_B d\Gamma_O = \underline{F}_M \cdot \int_{\Gamma_{OB}} \underline{X}_B d\Gamma_O + \frac{1}{2} \underline{G}_M^{RC} : \int_{\Gamma_{OB}} \underline{X}_B \otimes \underline{X}_B d\Gamma_O \quad (3.23)$$

Les formulations du premier tenseur des contraintes Piola-Kirchoff et tenseur des contraintes d'ordre supérieur sont également trouvés ensuite :

$$\underline{P}_M = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_O} \underline{p} \otimes \underline{X} d\Gamma_O \quad (3.24)$$

$$\underline{Q}_M = \frac{1}{2V_O} \int_{\Gamma_O} \underline{X} \otimes \underline{p} \otimes \underline{X} d\Gamma_O \quad (3.25)$$

où  $\underline{p} = \underline{n} \cdot \underline{P}_m$  est le vecteur de traction du tenseur des contraintes microstructurales  $\underline{P}_m$ , sur le bord du VER.

### 3.2.2 Exemples

Un exemple de calcul est donné afin d'illustrer la démarche proposée ci-dessus. Avec  $\underline{F}_M$  et  $\underline{G}_M$  donnés, les  $\underline{P}_M$  et  $\underline{Q}_M$  correspondants sont obtenus par la méthodologie détaillée ci-dessus. Le matériau considéré est l'aluminium poreux (la fraction volumique des porosités est  $f = 12\%$ ) comme montré sur la figure 3.5(a), sa matrice est simulée par le modèle élasto-visco-plastique de Bodner-Partom (Bodner and Partom, 1975). La motivation de ce choix est



de montrer que cette méthodologie est applicable à des lois de comportement complexes. Les équations principales du modèle sont présentées rapidement :

$$\boldsymbol{\tau} = K(J - 1)\mathbf{I} + G\overline{\mathbf{B}}_e^d \quad (3.26)$$

où  $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$  signifie le tenseur des contraintes Kirchoff,  $J = \det(\mathbf{F})$ ,  $\overline{\mathbf{B}}_e^d = \text{dev}(\overline{\mathbf{B}}_e)$  avec  $\overline{\mathbf{B}}_e = J^{-2/3}\mathbf{B}_e$ ,  $\mathbf{B}_e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^c$ ,  $K, G$  sont les modules de compressibilité et de cisaillement. La règle d'écoulement :

$$\mathbf{D}_p = \frac{\boldsymbol{\sigma}^{dev}}{2\eta} \quad (3.27)$$

où :

$$\eta = \frac{\sigma}{\sqrt{12}\Gamma_0} \exp\left(\frac{1}{2} \left[\frac{Z}{\sigma}\right]^{2n}\right)$$

où  $\sigma = \sqrt{3/2(\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d)}$  est la contrainte équivalente de von Mises,  $Z = Z_1 + (Z_0 - Z_1)\exp(-m\varepsilon_p)$ .  $Z_0$  et  $Z_1$  sont successivement les bornes supérieure et inférieure de la résistance à l'écoulement plastique,  $m$  est un paramètre matériau.

Dans cet exemple, les propriétés de l'aluminium sont :

- paramètres élastiques : module de cisaillement  $G = 2.6 \times 10^4 \text{MPa}$ , module de compressibilité  $K = 7.8 \times 10^4 \text{MPa}$
- paramètres de viscosité :  $\Gamma_0 = 10^8 \text{s}^{-2}$ ,  $m = 13.8$ ,  $n = 3.4$ ,  $Z_0 = 81.4 \text{MPa}$ ,  $Z_1 = 170 \text{MPa}$ .

Un exemple de flexion et traction combinées est présenté afin de montrer l'influence de  $\underline{\mathbf{G}}_M$  sur le VER, autrement dit la différence de deux schémas d'homogénéisation (classique et généralisé). Le chargement sur l'éprouvette macroscopique est montré dans la figure 3.4, et les configurations déformées des VER correspondants sont présentés dans la figure 3.5.

Dans cet exemple, on peut remarquer que la flexion macroscopique est clairement visible dans le VER avec le schéma du second ordre où tous les deux tenseurs  $\mathbf{F}_M$  et  $\underline{\mathbf{G}}_M$  sont prescrits, et la distribution locale des contraintes équivalentes dans le même schéma. Elles sont différentes des résultats prévus au premier ordre où le seul tenseur  $\mathbf{F}_M$  est prescrit sur le VER. Une différence importante de déformation locale est également montrée entre les deux méthodologies d'homogénéisation dans la figure 3.5, elle peut mener à des différences considérables de contraintes globales.

Un exemple de traction d'éprouvette entaillée est montré pour comparer l'usage de différents milieux homogènes généralisés équivalents dans l'homogénéisation au second ordre, modèle à couples de contraintes (ou Cosserat). Le même VER est encore considéré dans l'essai, l'éprouvette et le point de concentration de contrainte sont montrés dans la figure 3.6. L'essai consiste à appliquer sur le VER un tenseur  $\underline{\mathbf{G}}_M$  entier ou seulement sa partie de rotation (sa partie anti-symétrique) :

$$\underline{\mathbf{G}}_M^A = \underline{\mathbf{G}}_M - \underline{\mathbf{G}}_M^S$$

où  $\underline{\mathbf{G}}_M^S = \frac{1}{3}(G_{Mijk} + G_{Mjki} + G_{Mkij})$  est la partie symétrique de  $\underline{\mathbf{G}}_M$ . Cet exemple indique que le modèle à couples de contraintes (et aussi modèle de Cosserat) ne répond pas au cas où le mode de déformation est dominé par la gradient de l'extension. Il motive l'utilisation du gradient entier comme proposé au-dessous.

### 3.2.3 Effets de taille

La dépendance des contraintes de premier ordre Piola-Kirchoff et d'ordre supérieur par rapport à la taille de la micro-structure (dans ce cas le diamètre des vides dans VER), est

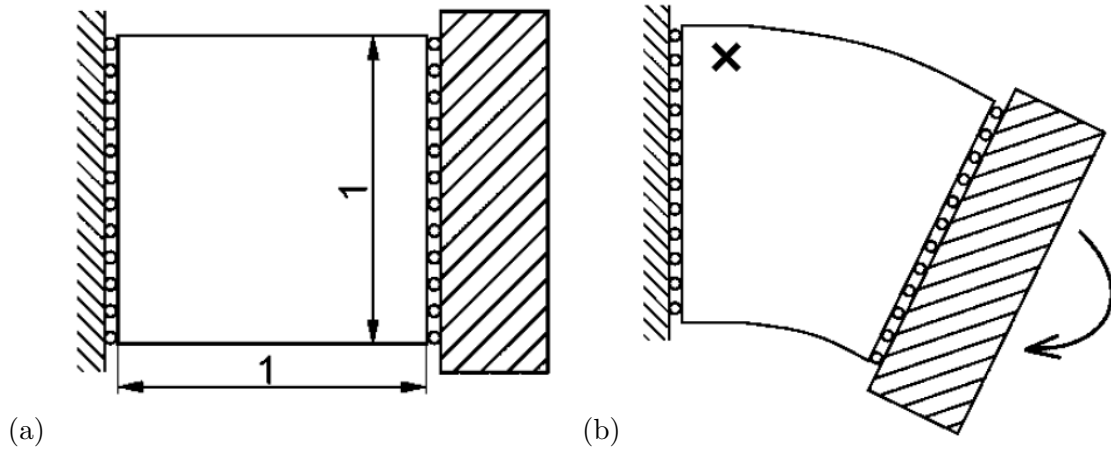


FIG. 3.4 – Représentation d’essai de flexion macroscopique sur le VER d’aluminium : la configuration initiale avec les dimensions en mm (a), et celle déformée avec le point en considération où le tenseur de déformation et son gradient sont enregistrés pour l’usage dans l’analyse de micro-structure (b).

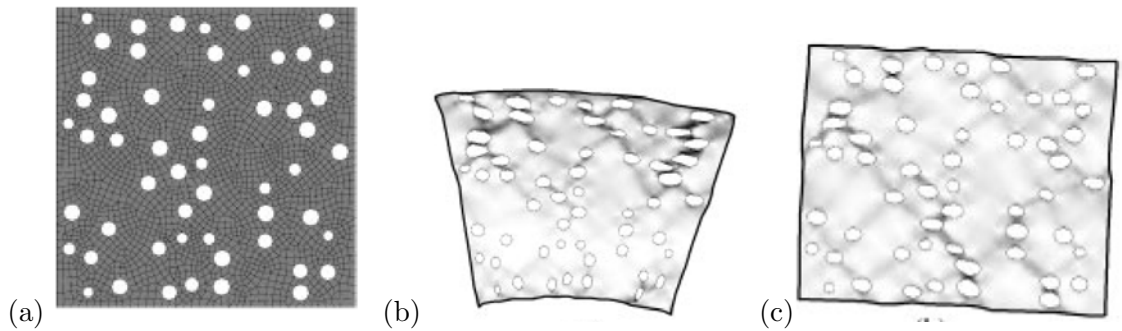


FIG. 3.5 – Le VER d’aluminium dans l’exemple de (Kouznetsova et al., 2002a) : le VER initial non-déformé (a), la configuration en déformation et la position du point considéré suivant l’homogénéisation au second ordre (b) et ceux suivant l’homogénéisation au premier ordre (c).

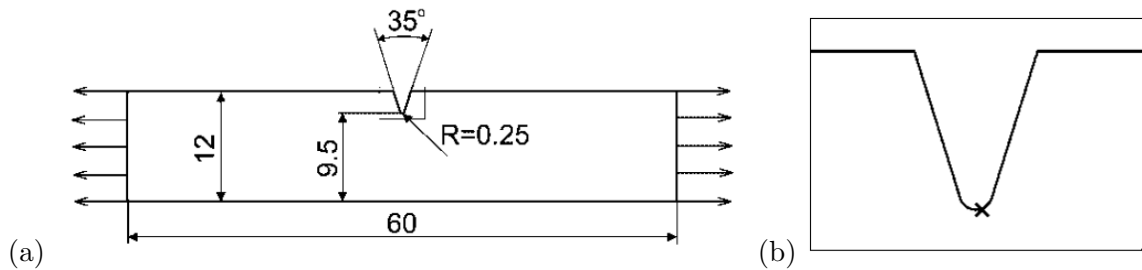


FIG. 3.6 – L’éprouvette entaillée dans l’essai de traction : dimensions de l’éprouvette (a) et la position du point particulier où le tenseur de déformation et son gradient sont enregistrés (b).

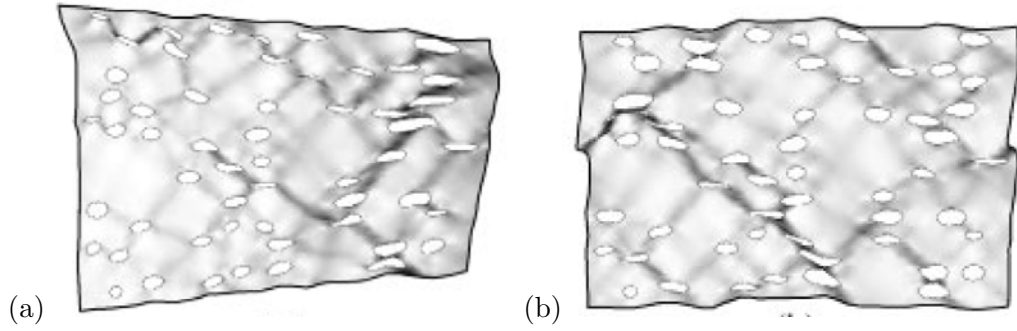


FIG. 3.7 – Le VER dans l'essai de traction déformé sous l'influence : du tenseur  $F_M$  et de tenseur  $G_M$  entier (a) du tenseur  $F_M$  et de la seule partie de courbure  $G_M^A$  (b).

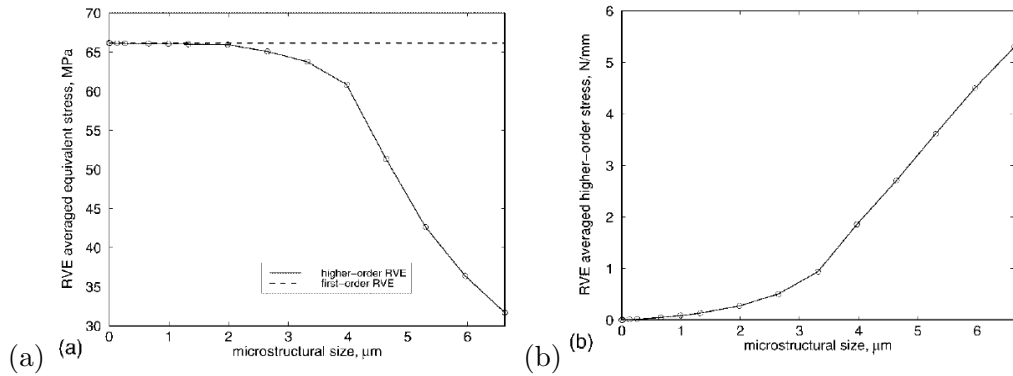


FIG. 3.8 – Mesure équivalente : du premier tenseur des contraintes Piola-Kirchhoff (a) et du tenseur des contraintes d'ordre supérieur (b) en fonction de la taille caractéristique de la micro-structure (la taille des vides en  $\mu\text{m}$ ).

également montrée dans (Kouznetsova et al., 2002a). Une valeur scalaire est utilisée comme la mesure équivalente afin de simplifier le calcul :

$$P_M^{eq} = (P_{Mij}P_{Mij})^{1/2} \quad Q_M^{eq} = (Q_{Mijk}Q_{Mijk})^{1/2}$$

Cet effet est mentionné plus en détail dans l'article (Kouznetsova et al., 2004b). Le résumé de ce dernier est contenu dans le paragraphe 3.3.

### 3.3 La taille du VER dans l'homogénéisation au second ordre

Dans ce paragraphe, on fait un résumé sur le contenu de (Kouznetsova et al., 2004b), dans lequel l'auteur a remarqué le rôle intrinsèque du choix de la taille du VER dans l'homogénéisation au second ordre des milieux périodiques.

Le schéma d'homogénéisation dans (Kouznetsova et al., 2002a) est de nouveau utilisé dans cette contribution. Le rôle de la taille du VER dans l'homogénéisation classique est montré. Dans un milieu aléatoire, si un volume élémentaire ne contient pas suffisamment les informations microstructurales, sous différentes conditions aux limites, i.e condition de déplacement homogène (KUBC) ou conditions en contraintes, les propriétés globales trouvées

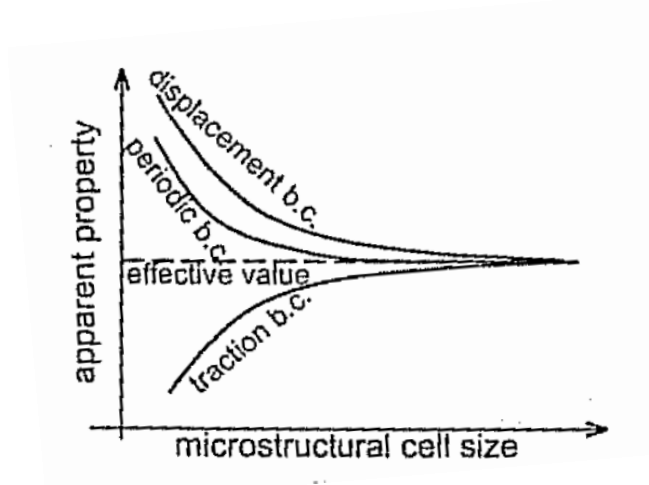


FIG. 3.9 – La convergence des propriétés mécaniques vers la valeur effective en fonction de la croissance de la taille de VER, sous différentes conditions aux limites.

sont définis “apparentes”. Si on augmente de plus en plus le nombre de cellules élémentaires contenues dans le volume sur lequel les propriétés effectives classiques sont évaluées, les propriétés apparentes obtenues pour différentes conditions, convergent à une valeur “effective” comme l’indique la figure 3.9. Dans cet article, l’auteur présente l’influence de la taille de VER via une micro-structure simple périodique. Le VER en considération est une cellule carrée avec un vide rond au centre. Mais d’abord une analyse par éléments finis sur un VER homogène modélisé par le milieu de Cauchy, met en évidence la relation entre sa taille de VER  $h$  et la longueur caractéristique  $l$  du milieu second-gradient homogène de substitution. Puis, le calcul par éléments finis sur le VER poreux est réalisée pour montrer l’influence du choix de la taille  $h$  non seulement dans le cas élastique mais aussi dans le cas élasto-plastique.

### 3.3.1 Le cas de VER homogène

Un calcul d’homogénéisation est réalisé, le but est de remplacer un VER composé de matériau homogène classique, par un matériau de substitution modélisé par le milieu du second gradient homogène. Un calcul par éléments finis est réalisé, avec un VER discrétisé comme un élément 8-nodes singles, comme le montre la figure 3.10. Ce calcul est limité au cas élastique. La relation entre contraintes et déformation dans le cadre d’élasticité linéaire est présentée ici :

- Contrainte de Piola-Kirchhoff I et déformation :

$$\begin{pmatrix} P_M^{11} \\ P_M^{22} \\ P_M^{12} \\ P_M^{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \mu \\ 0 & 0 & \mu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_M^{11} - 1 \\ F_M^{22} - 1 \\ F_M^{12} \\ F_M^{21} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

– Contraintes d'ordre supérieur et gradient de déformation :

$$\begin{pmatrix} Q_M^{111} \\ Q_M^{122} \\ Q_M^{112} \\ Q_M^{121} \\ Q_M^{211} \\ Q_M^{222} \\ Q_M^{212} \\ Q_M^{221} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{6}(\frac{\lambda}{2}) & \frac{h^2}{24}\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{24}\lambda \\ \frac{h^2}{24}\lambda & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{24}\mu & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) & \frac{h^2}{24}\mu & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) & \frac{h^2}{24}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{24}\mu & \frac{h^2}{12}\mu & \frac{h^2}{24}\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) & \frac{h^2}{24}\mu & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) & \frac{h^2}{24}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{24}\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{12}\mu & \frac{h^2}{24}\mu \\ \frac{h^2}{24}\lambda & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{24}\mu & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_M^{111} \\ G_M^{221} \\ G_M^{211} \\ G_M^{121} \\ G_M^{112} \\ G_M^{222} \\ G_M^{212} \\ G_M^{122} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Il est possible de comparer le résultat obtenu ici avec le modèle de matériau Mindlin où le comportement élastique est proposé :

$$\underline{\underline{P}} = \lambda \text{trace}((\nabla \underline{\underline{u}})^S) \underline{\underline{I}} + 2\mu(\nabla \underline{\underline{u}})^S \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Q}} = & a_1(\underline{\underline{G}} : \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{G}}) + \frac{1}{2}a_2(\underline{\underline{G}}^{LC} : \underline{\underline{I}} + 2(\underline{\underline{G}} : \underline{\underline{I}})^{LC} + \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{G}}^{RC}) + 2a_3(\underline{\underline{G}}^{LC} : \underline{\underline{I}})^{LC} + \\ & + 2a_4\underline{\underline{G}} + a_5(\underline{\underline{G}}^{LC} + (\underline{\underline{G}}^{LC})^{RC}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $A_{ijk}^{LC} = A_{jik}, A_{ijk}^{RC} = A_{ikj}$ .

La comparaison des formulations (3.28) et (3.29) avec (3.30) et (3.31) nous montre que le résultat analytique de l'homogénéisation de second-ordre est couvert par une classe de matériau Mindlin, pour laquelle, les paramètres du matériau sont choisis :

$$a_1 = \frac{1}{24}h^2\lambda, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{24}h^2\mu, a_5 = \frac{1}{24}h^2\mu \quad (3.32)$$

Un cas particulier de cette classe, qui est utilisé dans quelques contributions e.g dans (Amanatidou and Aravas, 2002), est mentionné ici, où un nouveau paramètre de matériau  $l$  est introduit :

$$a_1 = \frac{1}{2}l^2\lambda, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{2}l^2\mu, a_5 = \frac{1}{2}l^2\mu \quad (3.33)$$

La relation entre la longueur caractéristique  $l$  de ce matériau et la dimension de VER carré  $h$  est simple :

$$l^2 = \frac{h^2}{12} \quad (3.34)$$

Dans la suite, le comportement plasto-élastique est considéré.

### 3.3.2 Le cas d'un VER hétérogène

Cette analyse est réalisée sur les VERs hétérogènes qui sont présentés dans la figure 3.11 et dans la mode de flexion-traction.

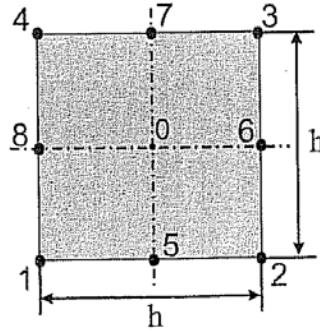


FIG. 3.10 – VER homogène pour l'analyse d'homogénéisation du second ordre de (Kouznetsova et al., 2004b).

### Comportement élastique linéaire

Le résultat est présenté dans les schémas suivants, entre la déformation équivalente de Green-Lagrange  $E_{eq} = (E_{Mij}E_{Mij})^{1/2}$  et les contraintes équivalentes de Piola-Kirchhoff I  $P_{eq} = (P_{Mij}P_{Mij})^{1/2}$ , entre le gradient équivalent de déformation  $G_{eq} = (G_{Mijk}G_{Mijk})^{1/2}$  et les contraintes équivalentes à l'ordre supérieur  $Q_{eq} = (Q_{Mijk}Q_{Mijk})^{1/2}$ . On peut remarquer que dans l'homogénéisation classique où seul le tenseur  $\tilde{\mathbf{E}}_M$  est appliqué, l'influence de la taille de VER n'est pas considérable, en particulier dans le cadre des petites déformations, les contraintes Piola-Kirchhoff  $\tilde{\mathbf{P}}_M$  ne varie pas en fonction de la taille de VER ; dans le cadre des grandes déformations où le rôle de la non-linéarité devient plus important, un petit décalage se passe entre les courbes de  $P_{eq}$  comme l'indique la figure 3.12 (à gauche). Au contraire, en prenant en compte le gradient de la déformation, ou dans l'homogénéisation d'ordre supérieur, le rôle de la taille de VER joue un rôle important, les courbes de  $Q_{eq}$  sont très différentes non seulement dans le cadre des grandes déformations mais aussi avec l'hypothèse des petites déformations, comme l'indique la figure 3.12 (à droite). De plus, la relation entre la contrainte d'ordre supérieur équivalente et la taille normalisée de VER, comme dans la figure 3.13 est linéaire ou la relation entre  $Q_{eq}$  et  $h$  est quadratique. Ici, la taille de VER est normalisée par le taux  $\frac{h^2}{d^2}$ . Ces analyses nous donnent un résultat cohérent avec le calcul analytique dans la section 3.3.1 avec l'hypothèse de petite déformation.

### Comportement élasto-plastique

Passant au cas élasto-plastique, des analyses similaires sont réalisées mais la matrice de VER n'est plus élastique. Le comportement du matériau est remplacé par un modèle élasto-plastique simple, la règle d'écoulement peut être consultée dans l'article (Kouznetsova et al., 2004b). Avec ce comportement, la dépendance entre contrainte d'ordre supérieur et gradient de déformation n'est plus quadratique. Elle devient plus compliquée comme dans la figure 3.14. Les relations contraintes-déformations sont montrées également dans la figure 3.15.

#### 3.3.3 Problème de cisaillement aux bords

Cette technique d'homogénéisation est appliquée à un problème macroscopique de cisaillement. Un matériau hétérogène dont la micro-structure périodique se constitue comme la première cellule unitaire dans la figure 3.11, est considéré de nouveau. Le matériau de substitution est modélisé par le milieu du second gradient dont les propriétés sont calculées

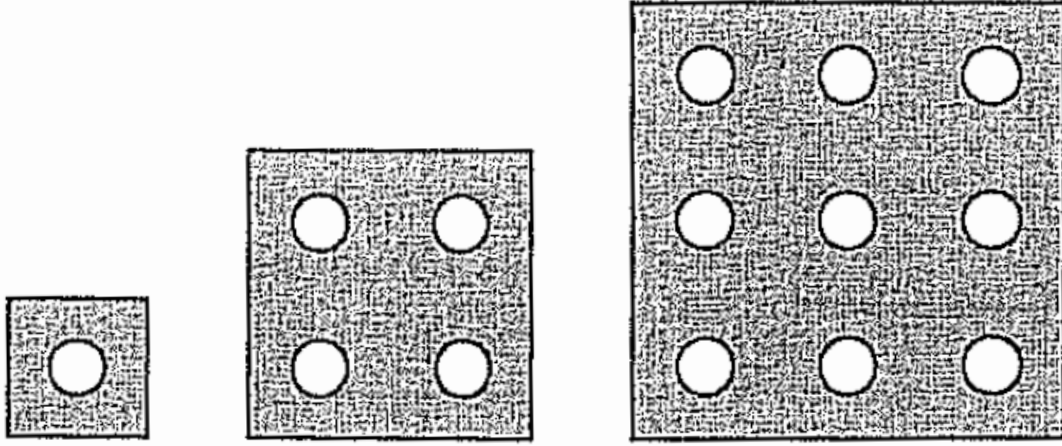


FIG. 3.11 – Les VERs utilisés dans l'analyse numérique de (Kouznetsova et al., 2004b).

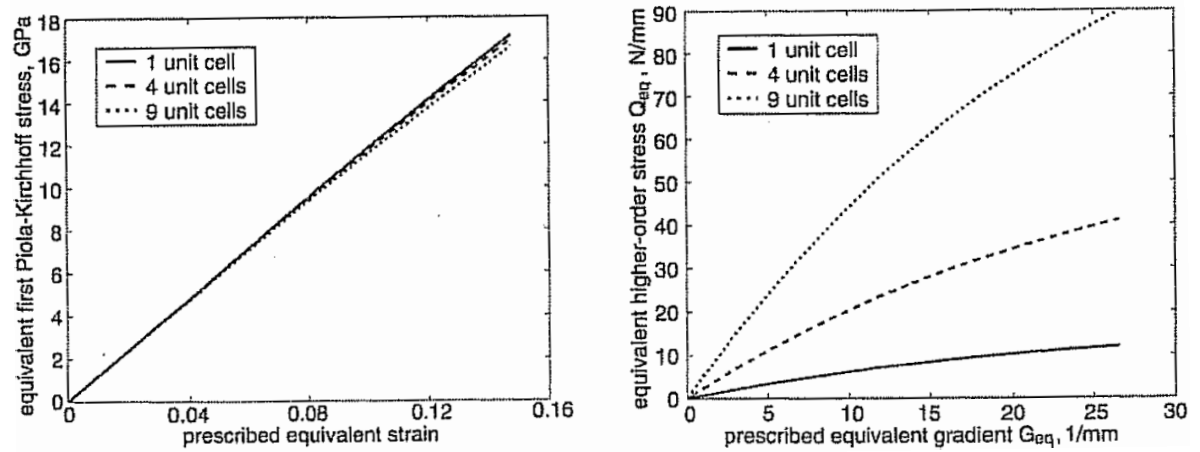


FIG. 3.12 – Relation entre : contrainte équivalente Piola-Kirchhoff  $P_{eq} = (P_{Mij}P_{Mij})^{1/2}$  et déformation équivalente Green-Lagrange  $E_{eq} = (E_{Mij}E_{Mij})^{1/2}$  (à gauche), contrainte équivalente d'ordre supérieur  $Q_{eq} = (Q_{Mijk}Q_{Mijk})^{1/2}$  et gradient de déformation équivalent  $G_{eq} = (G_{Mijk}G_{Mijk})^{1/2}$  (à droite).

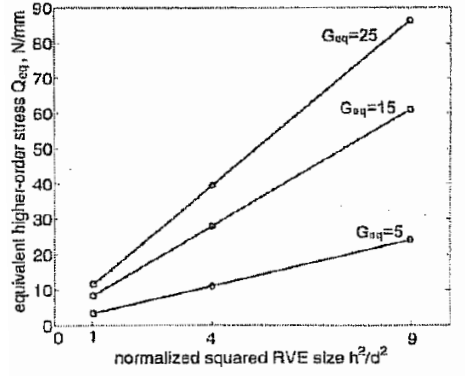


FIG. 3.13 – Relation linéaire entre la contrainte au second ordre équivalente  $Q_{eq} = (Q_{Mijk}Q_{Mijk})^{1/2}$  et la taille normalisée  $\frac{h^2}{d^2}$  de VER dans le cas de comportement élastique.

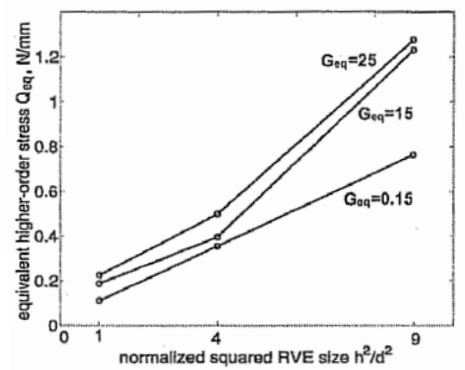


FIG. 3.14 – Relation entre la contrainte au second ordre équivalente  $Q_{eq} = (Q_{Mijk}Q_{Mijk})^{1/2}$  et la taille normalisée  $\frac{h^2}{d^2}$  de VER dans le cas du comportement élasto-plastique.



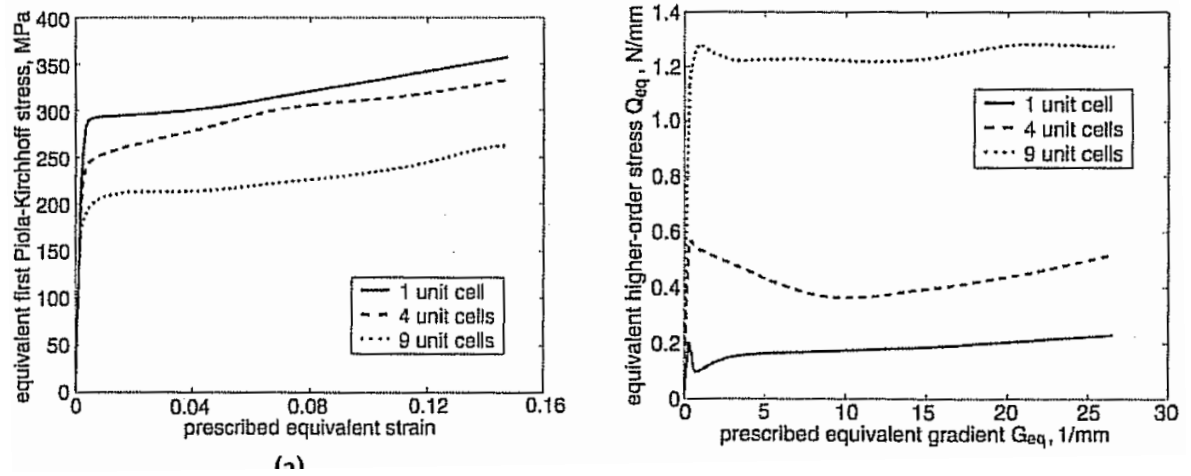


FIG. 3.15 – Relation entre : contrainte équivalente Piola-Kirchoff  $P_{eq} = (P_{Mij}P_{Mij})^{1/2}$  et déformation équivalente Green-Lagrange  $E_{eq} = (E_{Mij}E_{Mij})^{1/2}$  (à gauche), contrainte équivalente d'ordre supérieur  $Q_{eq} = (Q_{Mijk}Q_{Mijk})^{1/2}$  et gradient de déformation équivalent  $G_{eq} = (G_{Mijk}G_{Mijk})^{1/2}$  (à droite) dans le cas du comportement élasto-plastique.

par la technique d'homogénéisation au second ordre multi-échelle. A l'échelle microscopique, des VERs composés de 1,4,9... cellules unitaires sont tour à tour considérés, la taille correspondante de VER est  $h = 0,1; 0,2; 0,3...$  mm. Le problème macroscopique est illustré dans la figure 3.16 avec les conditions aux limites :

$$\underline{u} = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 1 \quad X_2 = 0 \quad (3.35)$$

$$u_1 = \gamma^*, \quad u_2 = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 1 \quad X_2 = H \quad (3.36)$$

où un gradient normal  $F_{22}$  est également imposé en plus du cisaillement  $\gamma^*$ . Un calcul analytique est réalisé et la fonction de contrainte de cisaillement normalisée par la contrainte prescrite est donnée par la formule :

$$\frac{\gamma(X_2)}{\gamma^*} = \frac{3H \left( -1 + \cosh \left[ \frac{\sqrt{3}(H-2X_2)}{h} \right] \operatorname{sech} \left[ \frac{\sqrt{3}H}{h} \right] \right)}{-3H + \sqrt{3}h \tanh \left[ \frac{\sqrt{3}H}{h} \right]} \quad (3.37)$$

Les courbes de  $\frac{\gamma(X_2)}{\gamma^*}$  avec les différents paramètres de  $h$  (la taille de VER), sont tracées dans la figure 3.17. La distribution de contrainte de cisaillement  $F_{12}$  avec l'homogénéisation numérique est montrée dans la figure 3.18 pour le cas élastique, et dans la figure 3.19 dans le cas plastique. Dans les deux cas, le glissement  $F_{12}$  varie en fonction de la taille de VER, de plus, dans le cas du comportement élasto-plastique,  $F_{12}$  varie en fonction également du glissement prescrit  $\gamma^*$ .

Dans le cas élastique, le résultat obtenu par calcul numérique est proche de la solution analytique classique.

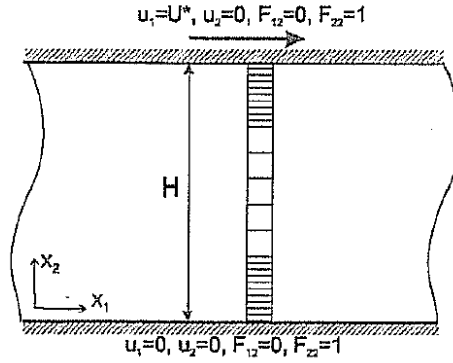


FIG. 3.16 – Géométrie , conditions aux limites et éléments finis pour le problème de cisaillement d'après (Kouznetsova et al., 2004b).

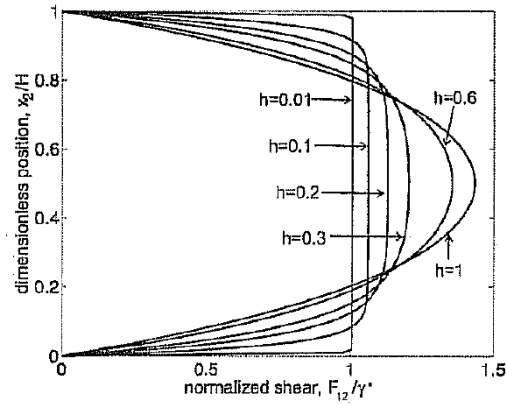


FIG. 3.17 – Plusieurs courbes de la solution analytique du problème de cisaillement correspondant à différentes valeurs de  $h$ , les formules analytiques correspondantes sont données par (3.37) d'après (Kouznetsova et al., 2004b).

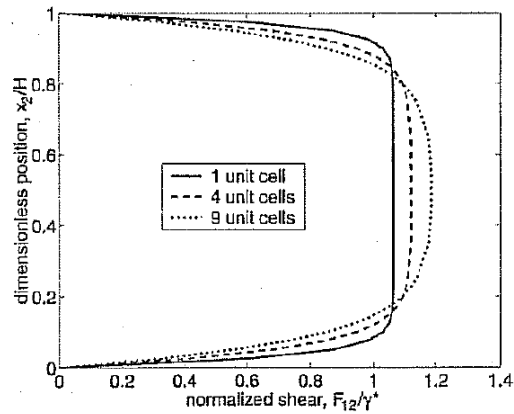


FIG. 3.18 – Résultat de l'homogénéisation numérique multi-échelle dans le cas de comportement élastique d'après (Kouznetsova et al., 2004b).

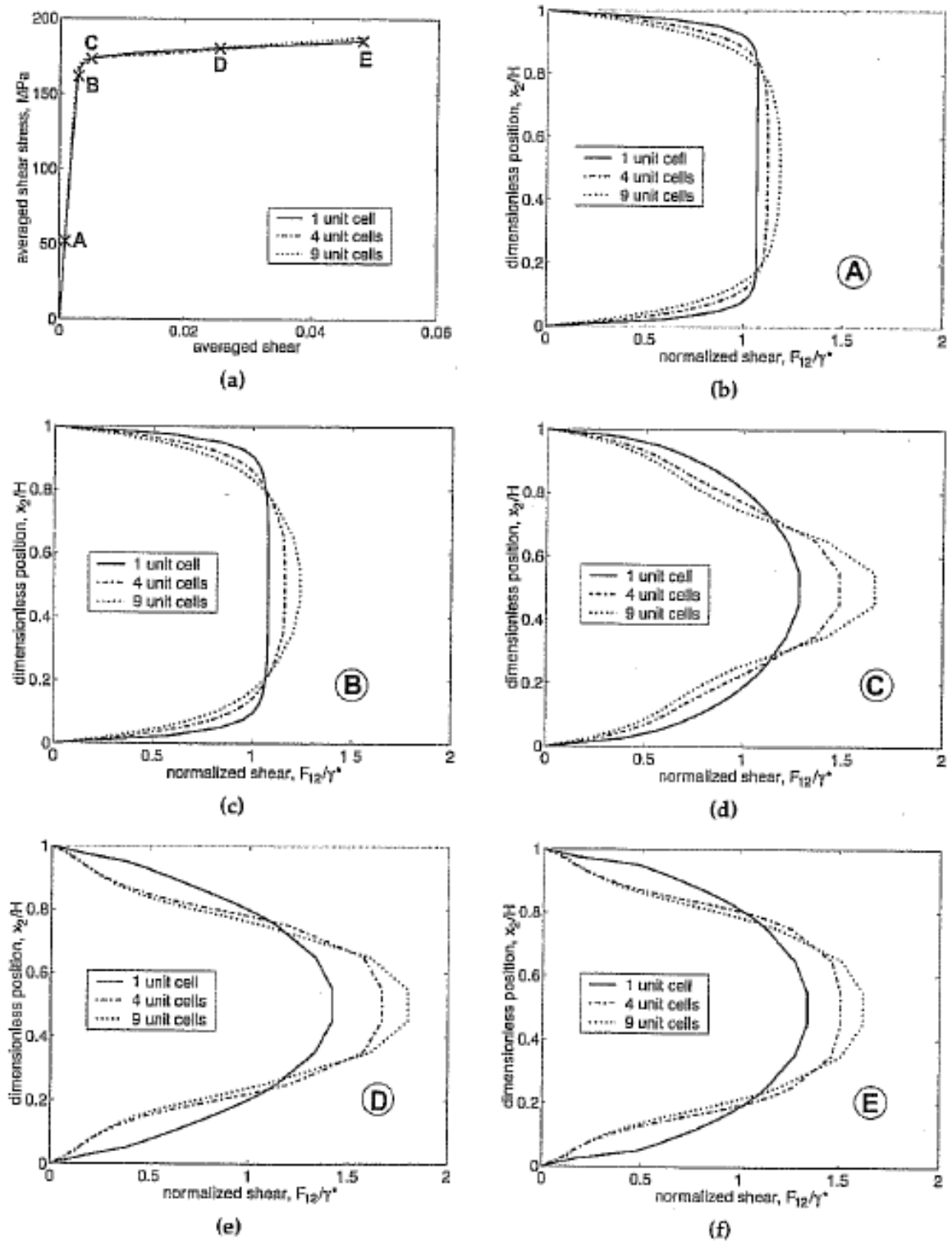


FIG. 3.19 – Résultat de l'homogénéisation numérique multi-échelle dans le cas du comportement élasto-plastique : la relation globale de déformation de glissement  $F_{12}$  et la valeur prescrite  $\gamma^*$  (a), et la distribution de  $F_{12}$  avec différente valeur de  $\gamma^*$  :  $\gamma^* = 0.0009$ (b)  $\gamma^* = 0.0029$ (c)  $\gamma^* = 0.005$ (d)  $\gamma^* = 0.0255$ (e)  $\gamma^* = 0.048$ (f).

### 3.4 Application du modèle à couples de contraintes pour homogénéiser un composite biphasé

Dans cette section, nous allons présenter une contribution sur l'application du modèle à couples de contrainte à l'homogénéisation d'ordre supérieur. Les articles mentionnés sont une série de trois articles des mêmes auteurs : (Ostoja-Starzewski et al., 1999a; Bouyge et al., 2001b; Bouyge et al., 2002a).

#### 3.4.1 Premiers essais dans (Ostoja-Starzewski et al., 1999a)

Comme dans d'autres contributions abordées dans ce chapitre de l'état de l'art, le but de cette recherche est de remplacer un matériau hétérogène par un matériau de substitution homogène équivalent. Le matériau hétérogène dans cette recherche est un composite périodique se constituant d'une cellule unitaire de deux phases (une inclusion et sa matrice), comme dans la figure 3.20(a). Chaque phase au niveau local (niveau de la cellule unitaire ou microscopique) est modélisé par le modèle de milieu continu classique (milieu de Cauchy) avec le comportement élastique isotrope. Comme mentionné au-dessus, la phase d'inclusion ( $i$ ) et la phase de matrice ( $m$ ) ont successivement le module de Young et le coefficient de Poisson  $E^i, E^m, \nu^i, \nu^m$ . En variant la fraction  $\frac{E^i}{E^m}$ , on peut modéliser une grande gamme de matériaux. A deux extrémités de la gamme,  $\infty$  et  $0$ , on a successivement des modèles de matériau à noyau rigide et de matériau poreux. De plus, à l'extrémité où  $\frac{E^i}{E^m} = 0$ , en faisant monter la fraction volumique de l'inclusion (ou le vide), on peut modéliser le système du réseau des poutres comme 3.20(b); ou dans le cas contraire, la propriété de matrice est très molle tandis que l'inclusion est rigide, on peut approcher à la modélisation d'un milieu en granulat.

La question est posée du choix du motif de la cellule élémentaire périodique. Un tel choix est sans incidence dans le cas de l'homogénéisation classique. Ce n'est pas le cas à l'ordre supérieur d'après les études présentées dans ce chapitre.

Afin de calculer les modules de rigidité généralisés, cette contribution se concentre sur un problème 2D. Dans l'analyse du milieu micro-polaire ou milieu Cosserat, il y a deux problèmes plans :

- Premier problème est la généralisation du problème élastique classique dans le plan avec :

$$\underline{u} = (u_1, u_2, 0), \quad \underline{\varphi} = (0, 0, \varphi_3)$$

- Second problème est la généralisation du problème élastique classique en dehors du plan avec :

$$\underline{u} = (0, 0, u_3) \quad \underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, 0)$$

Dans cet article, le premier problème est abordé. Le modèle à couples de contraintes, qui est le cas restrictif du milieu micro-polaire, est utilisé. Sa cinématique est présentée rapidement dans la section suivante.

#### Cinématique

Les champs de déplacement :

$$u_1, u_2, \quad \varphi_3 = (u_{2,1} - u_{1,2})/2 \quad (3.38)$$

Les champs de déformation correspondant aux champs de déplacement :

$$\gamma_{ij}, \quad \kappa_{i3} \quad (3.39)$$

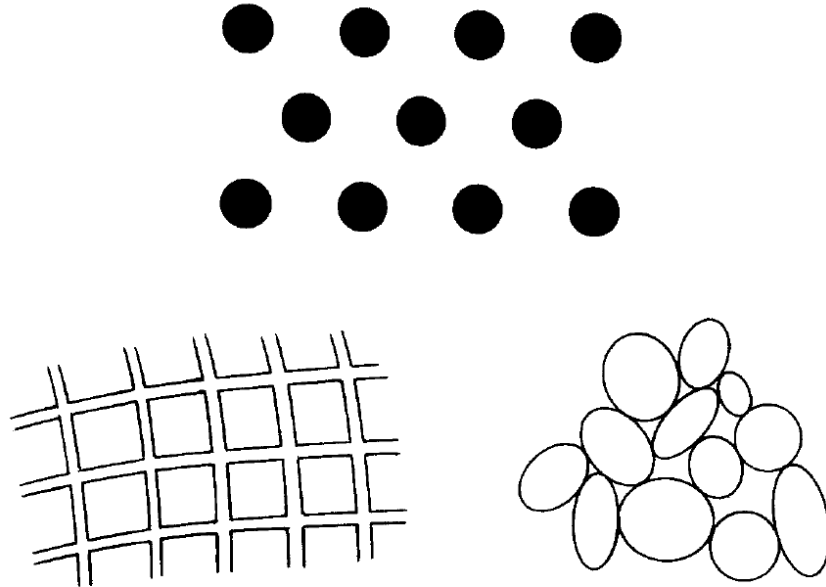


FIG. 3.20 – Quelques types de milieux modélisés par (Ostoj-Starzewski et al., 1999a) : composite périodique de deux phases (a), système des poutres(b), milieu granulat (c), d'après (Ostoj-Starzewski et al., 1999a).

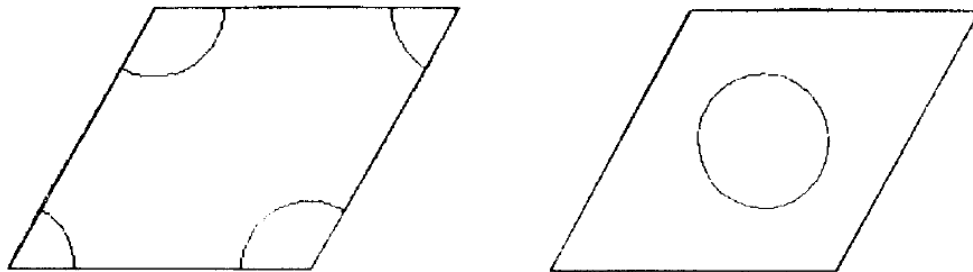


FIG. 3.21 – Deux possibilités de choix de VER suivant où l'inclusion se situe : aux quatre coins de la cellule (a) au centre de la cellule(b), d'après (Ostoj-Starzewski et al., 1999a).

Les champs de contrainte correspondant aux champs de déformation :

$$\sigma_{ij}, \quad \mu_{i3} \quad (3.40)$$

Parce que le composite considéré ici est centrosymétrique, il n'y a pas donc de couplage entre  $\gamma_{ij}$  et  $\kappa_{i3}$ . Le comportement du modèle couple-contrainte implique ainsi deux rigidités  $C_{ijkl}^{(1)}$  et  $C_{i3k3}^{(2)}$  suivant (Nowacki, 1986), et les contraintes sont déterminées par :

$$\gamma_{ij} = S_{ijkl}^{(1)} \sigma_{kl} \quad \kappa_{i3} = S_{i3k3}^{(2)} \mu_{k3} \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad (3.41)$$

Avec la disposition des inclusions sur un réseau triangulaire équilatéral, l'auteur se concentre sur le cas isotrope :

$$S_{ijkl}^{(1)} = \frac{1}{4} [S(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + (A - S)\delta_{ij}\delta_{kl}] \quad S_{i3k3}^{(2)} = \delta_{ik}M \quad (3.42)$$

où  $A, S, M$  compose un ensemble défini par l'auteur dans (Ostoja-Starzewski and Jasiuk, 1995), dans laquelle la longueur caractéristique  $l$  est introduite et définie par :

$$l = \sqrt{\frac{S}{4M}} = \sqrt{\frac{S_{1212}^{(1)}}{S_{1313}^{(2)}}} \quad (3.43)$$

### Formulation du problème

La condition périodique sur le bord du VER :

$$u_i(x + L) = u_i(x) + \gamma_{ij}L_j \quad t_i(x + L) = -t_i(x) \quad \forall x \in \delta B \quad (3.44)$$

de plus, il y a la relation simplifiée du modèle de Cosserat au modèle couple-contrainte :

$$\gamma_{11} = u_{1,1} \quad \gamma_{22} = u_{2,2} \quad \phi_3 = (u_{2,1} - u_{1,2})/2 \quad \kappa_{13} = \phi_{3,1} \quad (3.45)$$

Après des calculs simplifiés, la formulation (3.44) nous donne :

$$u_1(x + L) = u_1(x) - x_1x_2\kappa_{13} \quad u_2(x + L) = u_2(x) + \frac{x_1^2}{2}\kappa_{13} \quad \forall x \in \delta B \\ t_i(x_1 + L) = -t_i(x_1) \quad (3.46)$$

On doit noter que la condition au-dessus est seulement quasi-périodique, parce que la traction n'est que périodique à la gauche et à la droite de la cellule (voir 3.46). Sous l'influence de cette condition, nous allons trouver les modules effectifs du milieu équivalent couple-contrainte via les équations :

$$U^{cell} = U^{couple-stress} = \frac{V}{2} [\gamma_{ij}C_{ijmn}^{(1)}\gamma_{mn} + \kappa_{i3}C_{i3k3}^{(2)}\kappa_{k3}] \quad (3.47)$$

On prescrit successivement les conditions (3.44) avec  $\gamma_{22}$ ,  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{12}$  et on garde d'abord  $\kappa_{13} = 0$  :

$$U^{cell} = U^{couple-stress} = \frac{V}{2} (\gamma_{ij}C_{ijmn}^{(1)}\gamma_{mn}) \quad (3.48)$$

On peut calculer ainsi  $C_{2222}^{(1)}$ ,  $C_{1122}^{(1)}$ ,  $C_{1212}^{(1)}$ . Pour  $C_{1313}^{(2)}$ , on doit imposer toute la condition (3.46) et obtenir l'expression :

$$U^{cell} = U^{couple-stress} = \frac{V}{2} [\gamma_{11}C_{1111}^{(1)}\gamma_{11} + \kappa_{13}C_{1313}^{(2)}\kappa_{13}] \quad (3.49)$$

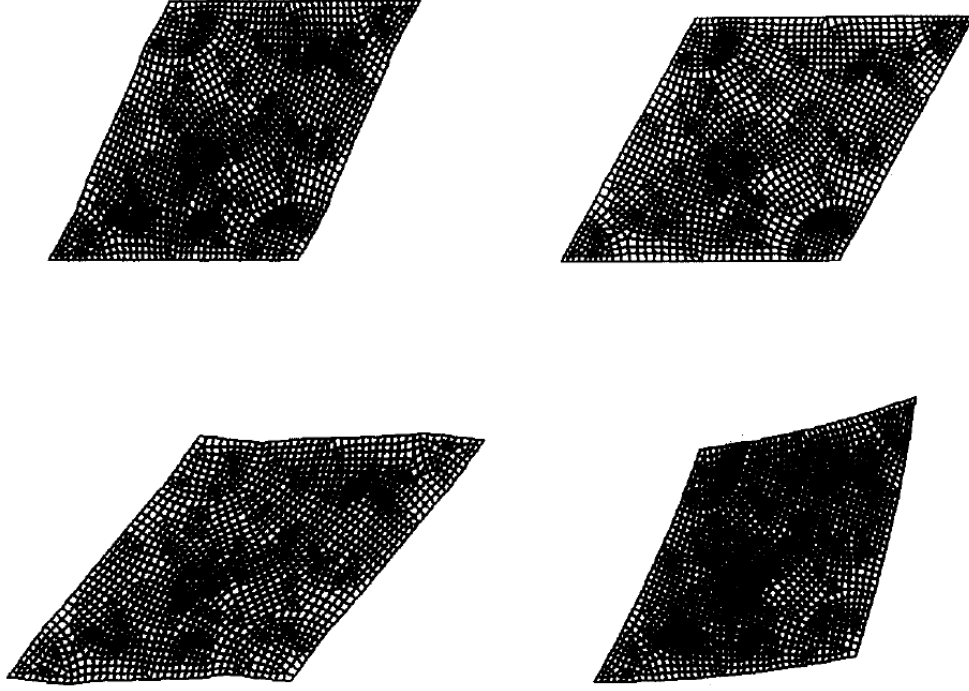


FIG. 3.22 – Quatre chargements afin de déterminer les modules effectifs du milieu de substitution à couples de contrainte :  $C_{2222}^{(1)}$ ,  $C_{1122}^{(1)}$ ,  $C_{1212}^{(1)}$  et  $C_{1313}^{(2)}$ , d'après (Ostoja-Starzewski et al., 1999b).

avec  $C_{1111}^{(1)}$  obtenu (qui est égal à  $C_{2222}^{(1)}$ ), le  $C_{1313}$  est ensuite déterminé. La figuration de quatre chargements pour la détermination des coefficients mentionnés au-dessus est présentée sur la figure 3.22 : avec les modules de rigidité obtenus, l'inverse des modules, les souplesses, sont calculées :

$$S_{1111}^{(1)} = \frac{C_{1111}^{(1)}}{[C_{1111}^{(1)}]^2 - [C_{1122}^{(1)}]^2} \quad S_{1212}^{(1)} = \frac{1}{4C_{1212}^{(1)}} \quad (3.50)$$

$$S_{1122}^{(1)} = \frac{C_{1122}^{(1)}}{[C_{1122}^{(1)}]^2 - [C_{1111}^{(1)}]^2} \quad S_{1313}^{(2)} = \frac{1}{C_{1313}^{(2)}} \quad (3.51)$$

$$(3.52)$$

et puis, le triplet  $A, S, M$  est trouvé à partir de (3.42) et la longueur caractéristique  $l$  est trouvée à partir de (3.43).

## Résultats numériques

Les auteurs ont présenté respectivement les résultats sous formes de diagrammes :  $C_{1111}^{(1)}$ ,  $C_{1122}^{(1)}$ ,  $C_{1212}^{(1)}$  et  $C_{1313}^{(2)}$ . Le coefficient de Poisson de la matrice est  $\nu^m = 0.24$  et le coefficient de l'inclusion est  $\nu^i = 0.24; 0.48$ . Le diagramme de chaque composante couvre trois fractions volumiques ( $f = 3.6\%, 18.4\% \text{ and } 58\%$ ). La longueur interne est aussi tracée dans la figure 3.24.

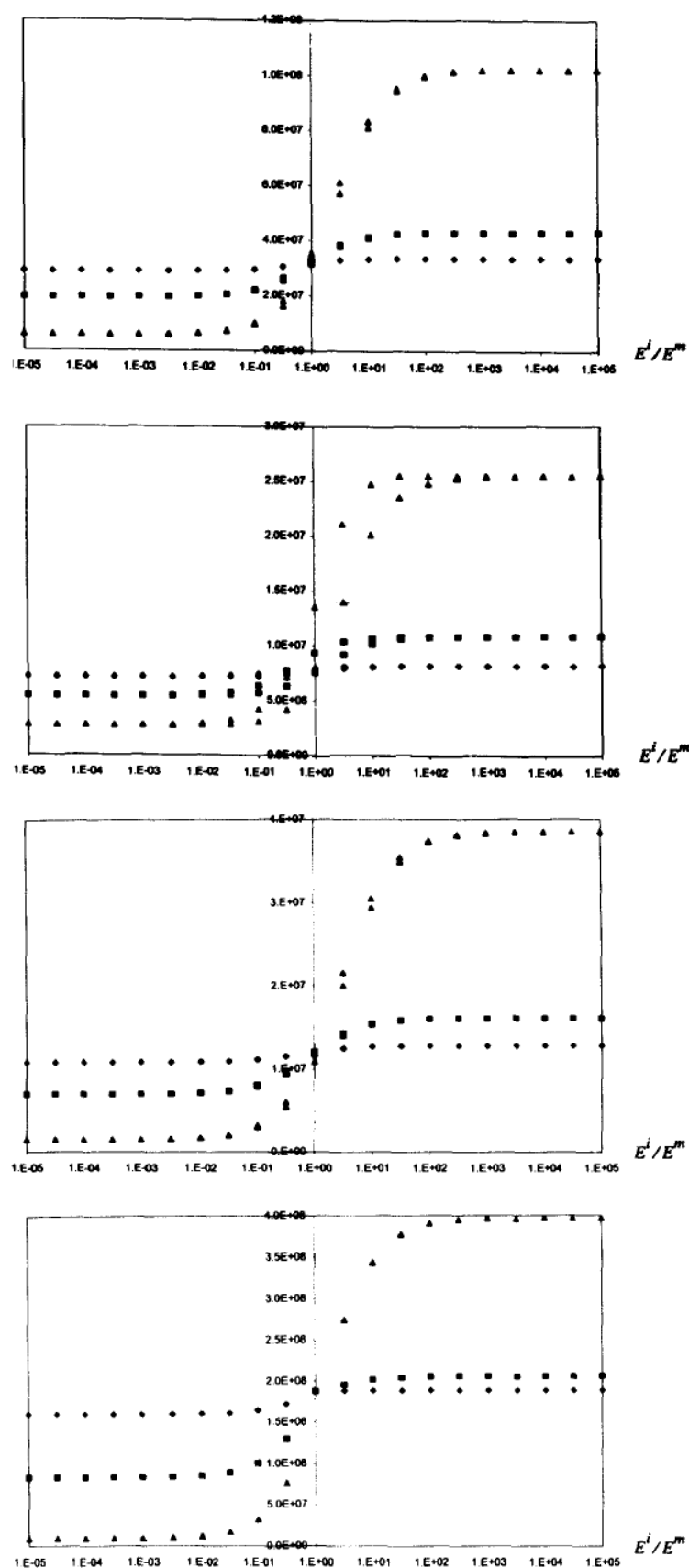


FIG. 3.23 – Les modules de rigidité en fonction des taux  $\frac{E^i}{E^m}$  :  $C_{2222}^{(1)}$ ,  $C_{1122}^{(1)}$ ,  $C_{1212}^{(1)}$  et  $C_{1313}^{(2)}$ , d'après (Ostoja-Starzewski et al., 1999b).



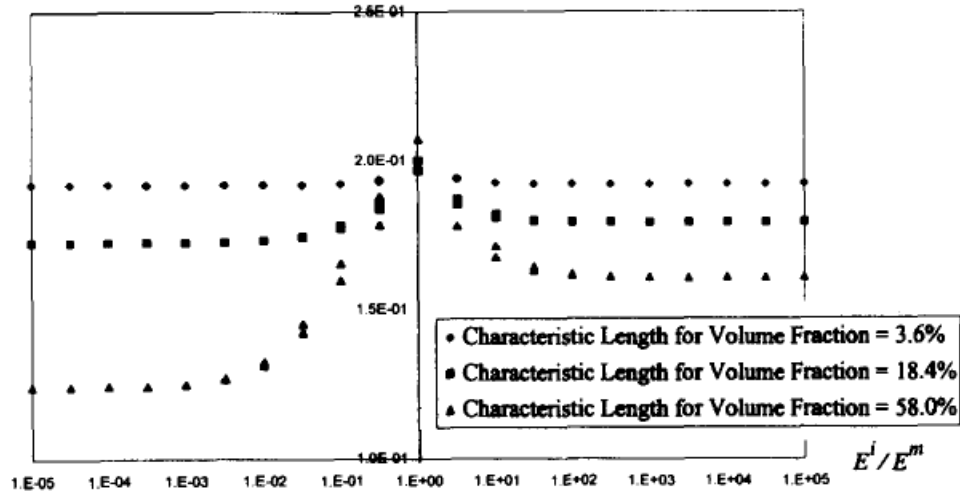


FIG. 3.24 – La longueur interne en fonction du contraste  $E^i/E^m$ .

### 3.4.2 Les améliorations et développements dans (Bouyge et al., 2001a)

Dans cet article, la même théorie et la même classe de matériaux que (Ostoja-Starzewski et al., 1999a) sont considérées. D'autres conditions aux limites sont abordées. Les deux VER "jumeaux" comme l'indique la figure 3.21 à la page 49 sont pris en considération. Les différentes conditions aux limites utilisées dans l'homogénéisation au second ordre sont formulées dans les sections suivantes. Les trois types de conditions suivantes sont choisies :

- Conditions aux limites en déplacement imposé.
- Conditions aux limites périodiques.
- Conditions aux limites en efforts imposés.

Chaque condition mène à trois essais : l'extension uniaxiale, le cisaillement simple et la flexion sur le VER choisi.

#### Conditions aux limites en déplacement

1. Extension uniaxiale :

$$u_1(x) = 0 \quad u_2(x) = \gamma_{22}x_2 \quad \forall x \in \delta B \quad (3.53)$$

2. Glissement simple :

$$u_1(x) = \gamma_{12}x_2 \quad u_2(x) = 0 \quad \forall x \in \delta B \quad (3.54)$$

3. Flexion

$$u_1(x) = -x_1x_2\kappa_{13} \quad u_2(x) = \frac{x_1^2}{2}\kappa_{13} \quad \forall x \in \delta B \quad (3.55)$$

#### Conditions aux limites périodiques

La condition périodique est "spécifique" et dépend du chargement considéré. La frontière de la cellule est décomposée en deux bords horizontaux  $\delta B_d$  et les deux bords restants  $\delta B_p = \delta B - \delta B_d$ .

## 1. Extension uniaxiale :

$$u_i(x + Le_1) = u_i(x) \quad t_i(x + Le_i) = -t_i(x) \quad \forall x \in \delta B_p \quad (3.56)$$

$$u_1(x) = 0 \quad u_2(x) = \gamma_{22}x_2 \quad \forall x \in \delta B_d \quad (3.57)$$

## 2. Cisaillement simple

$$u_i(x + Le_1) = u_i(x) \quad t_i(x + Le_i) = -t_i(x) \quad \forall x \in \delta B_p \quad (3.58)$$

$$u_1(x) = \gamma_{12}x_2 \quad u_2(x) = 0 \quad \forall x \in \delta B_d \quad (3.59)$$

## 3. Flexion

$$u_1(x + Le_1) = u_1(x) - x_1x_2\kappa_{13} \mid_{\delta B_p} \quad (3.60)$$

$$u_2(x + Le_1) = u_2(x) + \frac{x_1^2}{2}\kappa_{13} \mid_{\delta B_p} \quad \forall x \in \delta B_p \quad (3.61)$$

$$u_1(x) = -x_1x_2\kappa_{13} \quad u_2(x) = \frac{x_1^2}{2}\kappa_{13} \quad \forall x \in \delta B_d \quad (3.62)$$

$$t_i(x + Le_1) = -t_i(x) \quad (3.63)$$

Les conditions de périodicité ne sont donc que partielles.

**Conditions de contraintes imposées**

## 1. Traction uniaxiale

$$t_1(x) = \tau_{11}n_1 \quad t_2(x) = 0 \quad \forall x \in \delta B \quad (3.64)$$

qui produit  $S_{1111}^{(1)} = 2U^{*cell}/V$ .

## 2. Cisaillement et traction simple :

$$t_1(x) = \tau_{12}n_2 \quad t_2(x) = \tau_{12}n_1 \quad \forall x \in \delta B \quad (3.65)$$

qui produit  $S_{1212}^{(1)} = 2U^{*cell}/V$

## 3. Flexion

$$t_1(x) = \sigma_{11}n_1 = cx_2n_1 \quad t_2(x) = 0 \quad \forall x \in \delta B \quad (3.66)$$

qui produit  $S_{1313}^{(2)} = 2U^{*cell}/V$  quand l'origine du système de coordonnées est au centre de la cellule. avec  $c = M_B/I$  ( $M_B$  étant le moment et  $I = 2bh^3/3$  étant le moment d'inertie)

**Les essais sur deux VER sous différents chargements**

L'image de la configuration déformée des VER est présentée de la figure 3.25 à la figure 3.27, dans lesquelles la colonne à gauche (droite) correspond au cas où l'inclusion se situe aux coins (au centre).

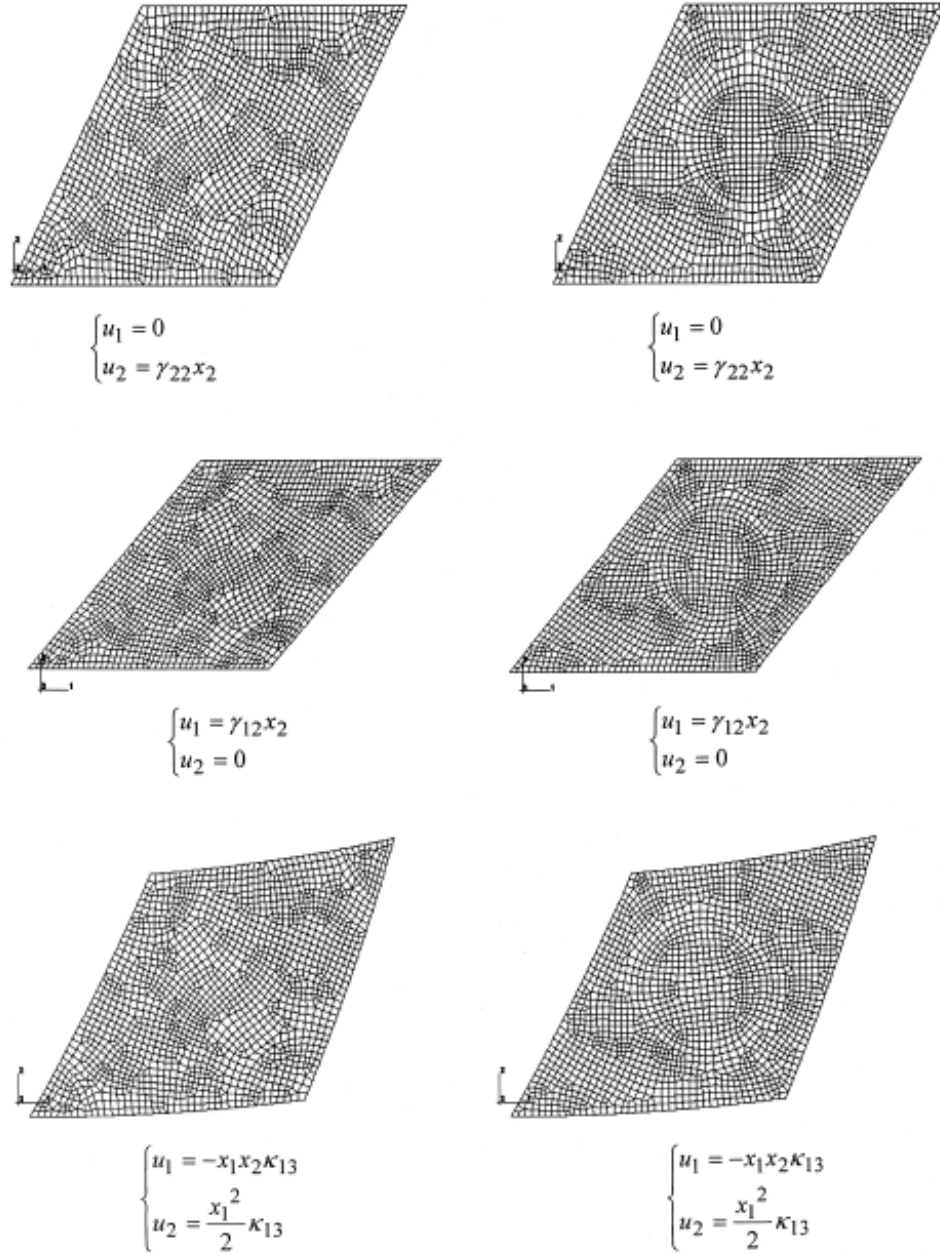


FIG. 3.25 – Les essais numériques sous la condition aux limites en déplacement : l'extension uniaxiale (en haut), le cisaillement simple (au milieu), la flexion (en bas), d'après (Bouyge et al., 2001a).

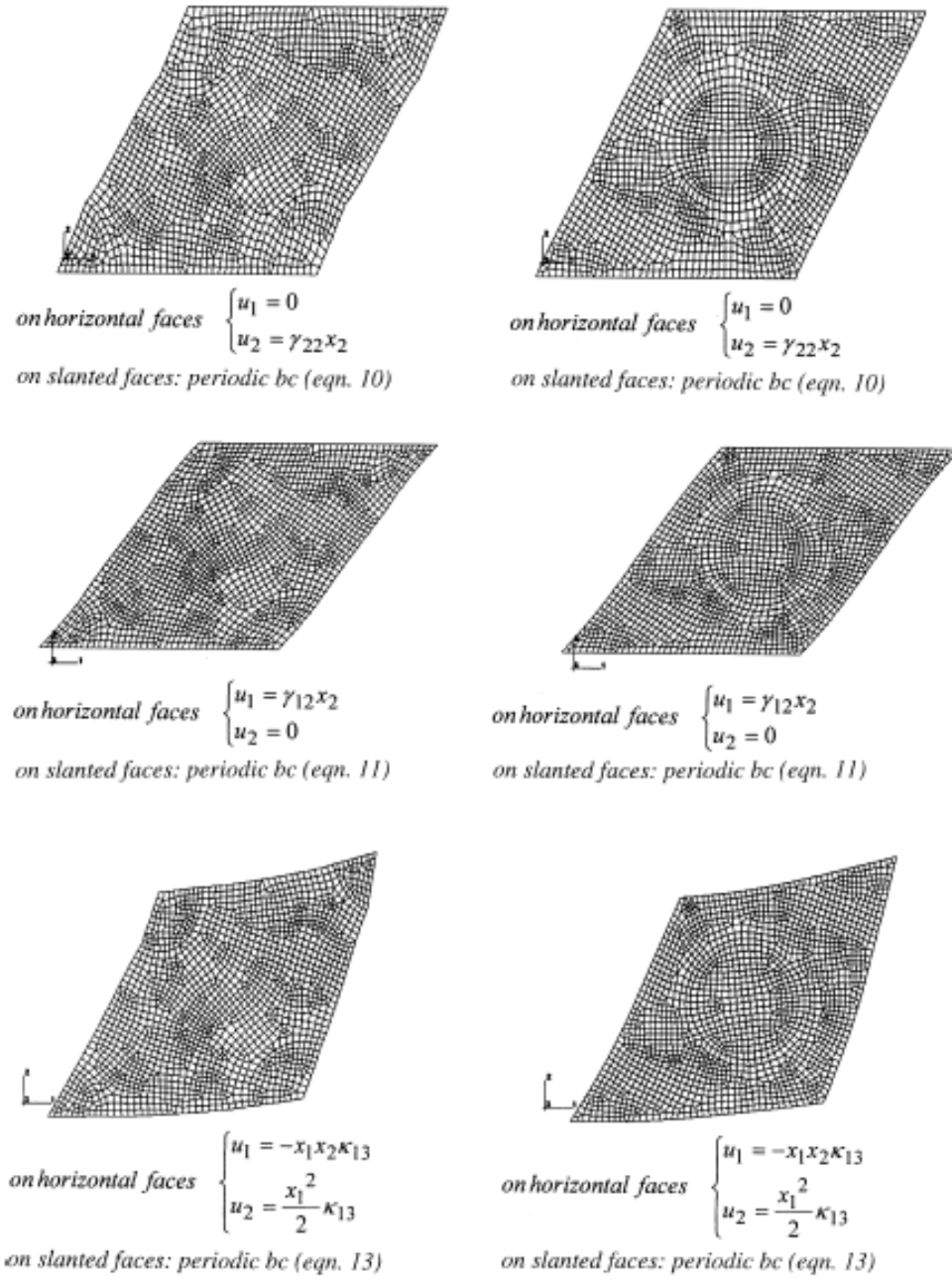


FIG. 3.26 – Les essais numériques sous les conditions périodiques : l'extension uniaxiale (en haut), le cisaillement simple (au milieu), la flexion (en bas), d'après (Bouyge et al., 2001a).

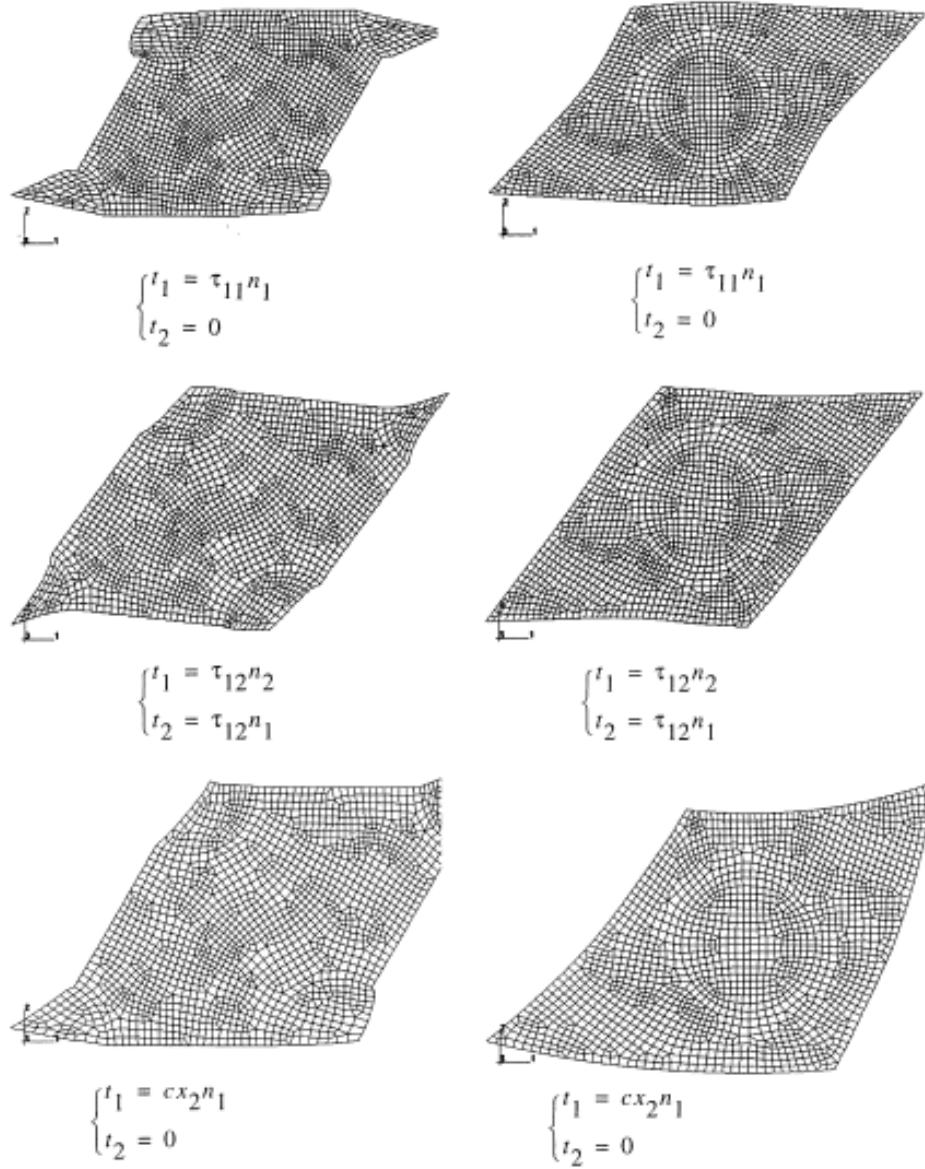


FIG. 3.27 – Les essais numériques sous la condition aux limites en contrainte imposée : l'extension uniaxiale (en haut), le cisaillement simple (au milieu), la flexion (en bas), d'après (Bouyge et al., 2001a).

### 3.5 Stratégie de modélisation multi-échelles numérique pour le milieu micromorphe

L'article de (Jänicke et al., 2009) a pour objectif de construire un milieu homogène équivalent de type micromorphe par une méthode d'homogénéisation d'ordre supérieur. Il s'agit donc d'étendre les approches précédentes à un milieu plus riche que les modèles de Cosserat et du second gradient. La cinématique du modèle micromorphe est connue actuellement comme le milieu le plus général présenté dans la section 3.5.1. Les matériaux ciblés sont les matériaux cellulaires (comme le tissu biologique, le polymère ou la mousse métallique) dont le comportement mécanique est complexe à fort contraste et donc sujet à de nombreux effets d'échelles. Il y a essentiellement trois méthodes de modélisation des matériaux cellulaires :

- Modéliser totalement la microstructure par élément finis. Il peut prendre en compte l'effet de micro-topologie. Mais le prix “numérique” est très “coûteux”.
- Modéliser le matériau seulement au niveau macro-scopique où le matériau est modélisé par le milieu généralisé en ajoutant les nouveaux degrés de liberté. Cependant, cette méthode demande d'introduire de nombreux paramètres supplémentaires du matériau qu'il est encore difficiles d'identifier.
- Combiner deux méthodes (modélisation EF<sup>2</sup>) où le comportement au niveau macro est remplacé par un calcul EF au niveau micro. Cette méthode mixte est encore “coûteuse” numériquement.

Dans cet article, un schéma d'homogénéisation est proposé se basant sur l'attache d'un milieu de Cauchy hétérogène microscopique à un point matériel au niveau macroscopique. Le problème au niveau micro sur le VER est un problème de mécanique des milieux continus classiques. Donc, il n'y pas de nouveaux ddls à ce niveau. Les contraintes d'ordre supérieur sont estimées au niveau macro par une procédure de moyenne adaptée.

La procédure d'homogénéisation est réalisée suivant le schéma suivant : les quantités de déformation *i.e* le gradient de déformation, la micro-déformation et le gradient de micro-déformation sont calculés à chaque point macroscopique et sont projetés sur les bords d'un micro-volume élémentaire. La règle de projection est un développement polynômial. Les coefficients de ce polynôme sont déterminés par la minimisation de la moyenne volumique de l'écart entre le déplacement macroscopique et le déplacement microscopique. A l'aide d'une condition aux limites de Dirichlet au niveau micro, le problème est résolu et les contraintes microscopiques sont transférées au niveau macroscopique. L'homogénéisation est complétée ensuite par l'estimation de la condition Hill-Mandel étendue. C'est une relation d'équivalence de la densité de l'énergie au niveau macro et de l'énergie de déformation attachée à un micro-volume.

#### 3.5.1 Cinématique

Cette contribution se positionne d'emblée dans le cadre des grandes déformations. Dans la cinématique micromorphe, on attache à chaque point matériel  $X$  un triplet de vecteurs  $\Xi$  caractérisant la microstructure sous-jacente. La microdéformation  $\chi$  caractérise alors la déformation de ce triplet, indépendamment de la déformation matérielle. Les fonctions caractérisant cette transformation sont :

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t) \quad \underline{\xi} = \underline{\xi}(X, \underline{\Xi}, t) \quad (3.67)$$

où les petites lettres font référence à la configuration actuelles et les majuscules à la configuration de référence. Ces équations conduisent à :

$$d\underline{x} = \underline{F}.d\underline{X} \quad \underline{\xi} = \underline{\chi}(X, t).\underline{\Xi} \quad (3.68)$$

où  $\underline{\chi}$  est le tenseur du second ordre de micro-déformation et il est possible de le découper grâce à la décomposition polaire :

$$\underline{\chi} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}} \quad (3.69)$$

où :  $\underline{\mathbf{R}}$  et  $\underline{\mathbf{U}}$  sont successivement tenseur de micro-rotation et micro-déformation pure. Ces deux tenseurs sont respectivement orthogonaux et symétriques, définis positifs. La propriété de  $\underline{\mathbf{R}}$   $\underline{\mathbf{U}}$  :

$$\underline{\mathbf{R}}^T \cdot \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{I}} \quad \det \underline{\mathbf{R}} = 1 \quad \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}^T$$

On peut découper encore  $\underline{\mathbf{U}}$  et obtenir :

$$\underline{\chi} = \bar{j} \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}}^* \quad (3.70)$$

où  $\det \underline{\mathbf{U}}^* = 1$ .

Cette décomposition peut conduire à deux autres modèles de milieux généralisés :

- $\underline{\chi} = \underline{\mathbf{R}}$  : milieu micropolaire/Cosserat.
- $\underline{\chi} = \bar{j} \underline{\mathbf{I}}$  : milieu à micro-dilatation. où  $\bar{j}$  est la micro-dilatation volumique scalaire du milieu.

### Mesures de déformation

Trois mesures de déformation sont nécessaires pour établir la loi de comportement du milieu micromorphe :

$$\underline{\mathbf{F}}, \quad \underline{\chi}, \quad \underline{\chi} \otimes \nabla$$

### Contraintes

- Contraintes de Piola-Kirchhoff :  $\underline{\mathbf{P}} = (\det \underline{\mathbf{F}}) \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\mathbf{F}}^{T-1}$  vérifie l'équation :

$$\underline{\mathbf{P}} \cdot \nabla + \rho \underline{\mathbf{b}} = 0 \quad (3.71)$$

où  $\rho \underline{\mathbf{b}}$  est la force volumique.

- Contraintes de second-ordre et de troisième ordre  $\underline{\mathbf{S}}$  et  $\underline{\mathbf{Q}}$  vérifiant l'équation :

$$\underline{\mathbf{Q}} \cdot \nabla + (\underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{S}}) \cdot \underline{\mathbf{F}}^T + \rho \underline{\mathbf{c}} = 0 \quad (3.72)$$

où  $\rho \underline{\mathbf{c}}$  est le tenseur des couples volumiques.

### Energie

L'énergie interne est égale à l'énergie de déformation :

$$\rho_0 \dot{\epsilon} = \underline{\mathbf{P}} : \underline{\dot{\chi}} \otimes \nabla - ((\underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{S}}) \cdot \underline{\mathbf{F}}^T) : \underline{\dot{\psi}} + \underline{\mathbf{Q}} : \underline{\dot{\psi}} \otimes \nabla \quad (3.73)$$

où  $\underline{\dot{\psi}} = \dot{\underline{\chi}} \cdot \underline{\chi}^{-1}$  est le tenseur de vitesse de micro-déformation.

#### 3.5.2 Définition des ddls à partir de la microstructure

On cherche à exprimer les déplacements et microdéformations du milieu macroscopique en fonction des déplacements au sein de la cellule élémentaire du matériau composite.

De manière similaire au cas de Cosserat considéré plus haut, on cherche à approcher le champ réel sur la cellule élémentaire,  $\underline{\mathbf{u}}_m$ , par une transformation homogène, qui généralise

le mouvement de corps rigide considéré pour Cosserat. Pour ce faire on minimise l'intégrale :

$$\left( \frac{1}{V_m} \int_{V_m} (\underline{\mathbf{u}}_m - \underline{\mathbf{u}}_M - \underline{\chi}_M \cdot (\underline{\mathbf{X}}_m - \underline{\mathbf{X}}_M)) dV \right)^2 \quad (3.74)$$

Après quelques transformations, la relation entre les champs globaux et locaux sont obtenus :

$$\underline{\mathbf{u}}_M = \langle \underline{\mathbf{u}}_m \rangle \quad (3.75)$$

$$\underline{\chi} = \frac{12}{l^2} \langle \underline{\mathbf{u}}_m \otimes (\underline{\mathbf{X}}_m - \underline{\mathbf{X}}_M) \rangle \quad (3.76)$$

$$\underline{\mathbf{F}}_M = \langle \underline{\mathbf{F}}_m \rangle \quad (3.77)$$

$$\underline{\chi} \otimes \nabla_M = \frac{12}{l^2} (\langle (\underline{\mathbf{u}}_m \otimes \underline{\mathbf{X}}_m) \otimes \nabla_m \rangle - (\underline{\mathbf{u}}_M \otimes \underline{\mathbf{X}}_M) \otimes \nabla_M) \quad (3.78)$$

La variable micromorphe apparaît donc comme le premier moment de la distribution du déplacement au sein de la cellule élémentaire.

Ensuite, les auteurs supposent une forme polynomiale de degré 3 du champ de déplacement microscopique :

$$\underline{\mathbf{u}}_m = \underline{\mathbf{A}}_M(\underline{\mathbf{X}}_M) + (\underline{\mathbf{B}}_M(\underline{\mathbf{X}}_M) - \underline{\mathbf{I}}) \cdot \underline{\mathbf{X}}_m + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{C}}_M(\underline{\mathbf{X}}_M) : (\underline{\mathbf{X}}_m \otimes \underline{\mathbf{X}}_m) + \frac{1}{6} \underline{\mathbf{D}}_M(\underline{\mathbf{X}}_M) \vdots (\underline{\mathbf{X}}_m \otimes \underline{\mathbf{X}}_m \otimes \underline{\mathbf{X}}_m) \quad (3.79)$$

Les coefficients dans  $\underline{\mathbf{A}}_M$ ,  $\underline{\mathbf{B}}_M$ ,  $\underline{\mathbf{C}}_M$ ,  $\underline{\mathbf{D}}_M$  dépendent de la position du point macroscopique  $\underline{\mathbf{X}}_M$ , donc les coefficients sont constants sur le micro-volume. Pour calculer 3 mesures de déformation  $\underline{\mathbf{F}}_M$ ,  $\underline{\chi}_M$ ,  $\underline{\chi} \otimes \nabla_M$ , l'équation (3.79) est introduite dans les équations de (3.77-3.78).

- Si  $\underline{\mathbf{u}}_m$  est constant, le triplet des mesures de déformation  $\underline{\mathbf{F}}_M$ ,  $\underline{\chi}_M$ ,  $\underline{\chi} \otimes \nabla_M$  est nul  $\longrightarrow A_M^1 = 0$ .
- Si  $\underline{\mathbf{u}}_m$  est linéaire, on trouve que :

$$\underline{\mathbf{B}}_M = \underline{\mathbf{F}}_M$$

- Si  $\underline{\mathbf{u}}_m$  est un polynôme second-order, on trouve que :

$$\underline{\mathbf{C}}_M = \underline{\chi}_M \otimes \nabla$$

- Si  $\underline{\mathbf{u}}_m$  est polynôme d'ordre 3, on trouve que

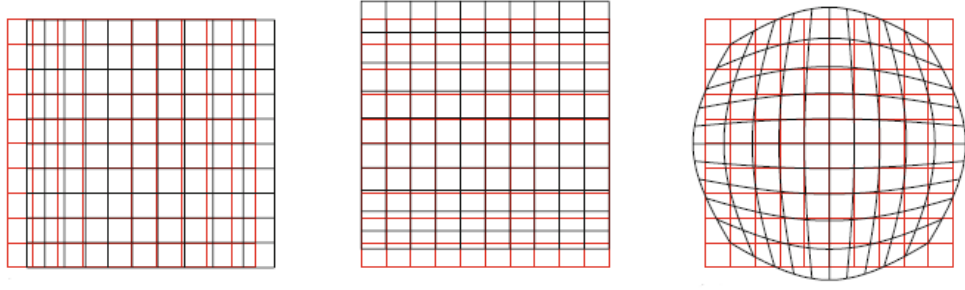
$$\underline{\mathbf{D}}_M = \frac{60}{l^2} \underline{\chi}_M \cdot \underline{\mathbf{E}}$$

où le tenseur d'ordre 4 de permutation  $\underline{\mathbf{E}}$  est une projection de  $\underline{\chi}_M$  à  $\underline{\mathbf{D}}_M$ .

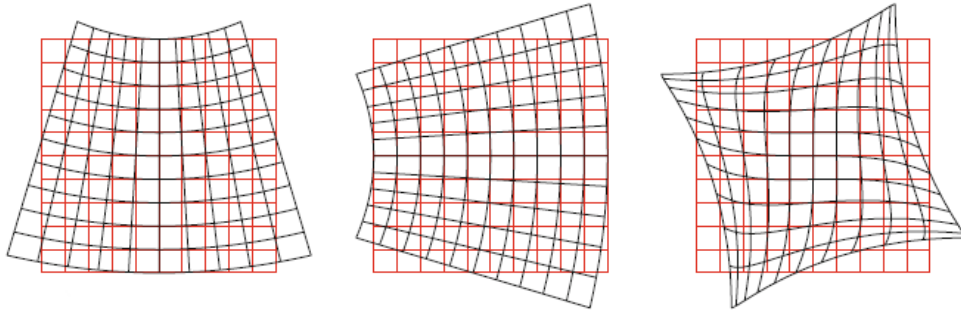
On a  $\underline{\mathbf{x}}_m = \underline{\mathbf{u}}_m + \underline{\mathbf{X}}_m$ , la position évolue selon :

$$\begin{aligned} x_{m1} = & F_{M11}X_{m1} + F_{M12}X_{m2} + \frac{1}{2} \left( \underline{\chi}_{M11,1}X_{m1}^2 + 2\underline{\chi}_{M12,1}X_{m1}X_{m2} + \underline{\chi}_{M12,2}X_{m2}^2 \right) \\ & + \frac{10}{l^2} \left[ \chi_{M11}^*(3X_{m1}X_{m2}^2 - X_{m1}^3) + \chi_{M12}^*(3X_{m1}^2X_{m2} - X_{m2}^3) \right] \end{aligned} \quad (3.80)$$





4 Quadratic and cubic deformation modes of the isotropic microstretch continuum:



5 Quadratic and cubic deformation modes of the micropolar continuum:

FIG. 3.28 – Les modes de déformations sous condition polynômiale second–ordre (a,b) et d’ordre trois dans l’article de (Jänike and Diebels, 2009).

et

$$x_{m2} = F_{M21}X_{m1} + F_{M22}X_{m2} + \frac{1}{2} \left( \chi_{M21,1}X_{m1}^2 + 2\chi_{M21,2}X_{m1}X_{m2} + \chi_{M22,2}X_{m2}^2 \right) + \\ + \frac{10}{l^2} [\chi_{M21}^*(3X_{m1}X_{m2}^2 - X_{m1}^3) + \chi_{M22}^*(3X_{m1}^2X_{m2} - X_{m2}^3)]$$

Le champ de déplacement (3.80) est établi pour le cas du milieu micromorphe. Il est à noter que les auteurs ne font pas intervenir de fluctuation par rapport à ce champ qui représente donc une approximation du champ réel généralement non polynomial. On obtient les cas particuliers du milieu micropolaire/Cosserat lorsque  $\chi_M = \mathbf{R}_M$ , et pour le cas du milieu micro-dilatation lorsque  $\mathbf{j}_M = (\det \mathbf{U}_M)^{1/2} = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{U}_M$ . Quelques configurations déformées d’un VER (pris homogène pour l’illustration) sont données pour différents choix des coefficients des polynômes précédents, sur la figure 3.28.

Les auteurs montrent également des exemples de validation qui seront repris dans notre thèse.

### 3.6 Méthode de correction des modules homogénéisés d’ordre supérieur

Dans l’article de (Li, 2011), l’homogénéisation des matériaux pour lesquels la supposition de séparation d’échelle n’est plus valable est considérée. L’auteur a proposé une méthodologie

d'homogénéisation d'ordre supérieur utilisant le milieu du second gradient comme milieu équivalent. Cette méthodologie se compose de deux étapes :

- Homogénéisation sur une seule cellule unitaire.
- Transition des propriétés homogénéisées localement aux propriétés de la structure homogène entière.

Cette article a le mérite de mettre en évidence la nécessité de corriger les modules effectifs généralisés obtenus selon les méthodes précédentes pour les appliquer au calcul de structures homogénéisés. La deuxième étape est nouvelle par rapport aux contributions précédentes.

**Les hypothèses principales.** La procédure d'homogénéisation est basée sur les remarques et les hypothèses suivantes :

- Une cellule unitaire n'est pas infinitésimale, elle a une dimension finie. La structure  $\Omega$  se compose d'un nombre fini de cellules  $\Omega^{(m)}$ . Les  $\Omega^{(m)}$  constituent un recouvrement de  $\Omega$  sans chevauchement.
- Les phases du matériau hétérogène au niveau microscopique sont considérées comme élastiques classiques.
- Le développement Taylor du déplacement microscopique en fonction des coordonnées macroscopiques  $x$  et microscopiques  $y$  :

$$u_i^m(x, y) = \frac{\partial u_i^m(x)}{\partial x_j} y_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i^m(x)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_i^m(x)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} y_j y_k y_l + o(y^4) \quad (3.81)$$

est réécrit en fonction de la moyenne de gradient de déplacement :

$$u_i^{(m)} = \bar{u}_{i,j}^{(m)} y_j + \frac{1}{2} \bar{u}_{i,jk}^{(m)} y_j y_k + \frac{1}{6} \bar{u}_{i,jkl}^{(m)} y_j y_k y_l - 3\bar{I}_{kl} + \dots \quad (3.82)$$

où

$$\bar{u}_{i,j}^{(m)} = \frac{1}{V^{(m)}} \int_{\Omega^{(m)}} u_{i,j}^{(m)}(y) dV \quad \bar{u}_{i,jk}^{(m)} = \frac{1}{V^{(m)}} \int_{\Omega^{(m)}} u_{i,jk}^{(m)}(y) dV \quad \bar{I}_{kl} = \frac{1}{V^{(m)}} \int_{\Omega^{(m)}} y_k y_l dV \quad (3.83)$$

**L'homogénéisation sur une seule cellule unitaire.** La procédure d'homogénéisation proposée est basée sur des contraintes imposées au contour de la cellule élémentaire. Les contraintes imposées ont un profil affine. Elle conduit à la définition de la moyenne de densité d'énergie de déformation sur une cellule  $U^{(m)}$  de la forme :

$$U^{(m)} = \frac{1}{2} \left( \bar{\sigma}_{ij}^{(m)} \bar{u}_{i,j}^{(m)} + \bar{\sigma}_{ijk}^{(m)} \bar{u}_{i,jk}^{(m)} \right) \quad (3.84)$$

où

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(m)} = \frac{1}{V^{(m)}} \int_{\partial\Omega^{(m)}} t_i^{(m)} y_j dS \quad \bar{\sigma}_{ijk}^{(m)} = \frac{1}{V^{(m)}} \int_{\partial\Omega^{(m)}} t_i^{(m)} y_j y_k dS \quad (3.85)$$

avec  $\underline{t}$  est le vecteur de traction et le théorème de Green est appliqué pour établir les relations (3.85) et (3.84) en partant de la moyenne de l'énergie élastique sur la cellule. Les contraintes  $\sigma_{ijk}$  sont les hypercontraintes du milieu du second gradient. Attention : dans cette section, l'exposant (m) indique le numéro de la cellule élémentaire et ne fait pas référence au mot "microscopique".

**Transition la rigidité locale à la structure entière.** La procédure de transition commence par l'application de la condition Hill-Mandel généralisée :

$$U^{(m)} = \frac{1}{2} \left( \bar{C}_{ijkl}^{(m)} \bar{u}_{i,j}^{(m)} \bar{u}_{p,q}^{(m)} + \bar{D}_{ijkpqr}^{(m)} \bar{u}_{i,jk}^{(m)} \bar{u}_{p,qr}^{(m)} \right) \quad (3.86)$$

où

$$\bar{\sigma}_{i,j} = \bar{C}_{ijkl}^{(m)} \bar{u}_{i,j}^{(m)} \quad \bar{\sigma}_{i,jk} = \bar{D}_{ijkpqr}^{(m)} \bar{u}_{i,jk}^{(m)} \quad (3.87)$$

Les  $\bar{D}_{ijkpqr}^{(m)}$  sont les modules élastiques généralisés du second gradient déterminés sur chaque cellule  $\Omega^{(m)}$ . L'énergie totale  $\int_{\Omega} U dV$  de la structure  $\Omega$  est discrétisée en cellules  $\Omega^{(m)}$  :

$$\int_{\Omega} U dV = \sum_m V^{(m)} U^{(m)} = \frac{1}{2} \sum_m V^{(m)} \left( \bar{C}_{ijkl}^{(m)} \bar{u}_{i,j}^{(m)} \bar{u}_{p,q}^{(m)} + \bar{D}_{ijkpqr}^{(m)} \bar{u}_{i,jk}^{(m)} \bar{u}_{p,qr}^{(m)} \right) \quad (3.88)$$

Puis, en considérant l'égalité :

$$\int_{\Omega} u_{i,j} \bar{C}_{ijkl} u_{k,l} dV = \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} u_{i,j}^{(m)} \bar{C}_{ijkl}^{(m)} u_{p,q}^{(m)} dV \quad (3.89)$$

qui se transforme en :

$$\int_{\Omega} u_{i,j} \bar{C}_{ijkl} u_{k,l} dV = \sum_m V^{(m)} \left( \bar{u}_{i,j}^{(m)} \bar{C}_{ijkl}^{(m)} \bar{u}_{p,q}^{(m)} + \bar{u}_{i,jk}^{(m)} \bar{C}_{ijkl}^{(m)} \bar{u}_{p,qr}^{(m)} \bar{I}_{kr}^{(m)} \right) \quad (3.90)$$

où un terme  $\bar{C}_{ijkl}^{(m)}$  est lié au terme de gradient de déplacement  $u_{i,jk}$ . Cela permet d'améliorer le module de rigidité d'ordre supérieur  $\bar{D}_{ijkpqr}^{(m)}$  en introduisant (3.90) à (3.88). Les modules d'ordre supérieur de rigidité de la structure entière sont donc modifiés :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U dV &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{i,j} \bar{C}_{ijpq} u_{p,q} + u_{i,jk} (\bar{D}_{ijkpqr} - \bar{C}_{ijpq} \bar{I}_{kr}) u_{p,qr}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{i,j} \bar{C}_{ijpq} u_{p,q} + u_{i,jk} D_{ijkpqr} u_{p,qr}) dV \end{aligned} \quad (3.91)$$

où

$$C_{ijkl} = \bar{C}_{ijkl} \quad D_{ijkpqr} = \bar{D}_{ijkpqr} - \bar{C}_{ijpq} \bar{I}_{kr} \quad (3.92)$$

Un exemple numérique est réalisé pour illustrer cette procédure d'homogénéisation. L'exemple montre en particulier qu'avec cette correction, les modules homogénéisés d'ordre supérieur s'annulent si le milieu composite est homogène. C'est une propriété souhaitée du schéma d'homogénéisation.



## Chapitre 4

# Modèle micromorphe de composites élastiques

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Homogénéisation au second ordre . . . . .</b>	<b>67</b>
4.1.1	Modèle du second gradient et la méthode des développements asymptotiques multi-échelles . . . . .	68
4.1.2	Les exigences pour l'homogénéisation au second ordre . . . . .	68
4.1.3	Polynôme quadratique proposé . . . . .	69
4.1.4	Le lien entre l'approche à couple de contraintes et l'approche de Cosserat . . . . .	72
4.1.5	Les limitations des approches actuelles . . . . .	72
<b>4.2</b>	<b>Approche micromorphe . . . . .</b>	<b>73</b>
4.2.1	La définition des degrés de liberté micromorphes . . . . .	74
4.2.2	Les mesures de déformation d'ordre supérieur . . . . .	75
4.2.3	Polynôme proposé comme condition aux limites . . . . .	75
<b>4.3</b>	<b>Le volume élémentaire représentatif pour des conditions aux limites non-homogènes . . . . .</b>	<b>77</b>
4.3.1	La convergence de l'énergie pour les polynômes quadratiques et cubiques dans le cas linéaire élastique . . . . .	77
4.3.2	Cas particulier d'un milieu micro-homogène . . . . .	80
4.3.3	La convergence du schéma d'homogénéisation pour les milieux élasto-plastiques . . . . .	82
<b>4.4</b>	<b>Caractérisation du champ de fluctuations . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>4.5</b>	<b>La contribution globale de la fluctuation à l'énergie et au gradient macroscopique de déformation . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>4.6</b>	<b>Calculs des modules effectifs d'ordre supérieur . . . . .</b>	<b>87</b>
4.6.1	Principe du calcul des modules effectifs . . . . .	87
4.6.2	Calcul des modules effectifs du milieu de substitution du second gradient . . . . .	87
	Notations . . . . .	87
	Prise en compte des valeurs nulles de la matrice . . . . .	88
	Détermination des modules . . . . .	89
4.6.3	Calcul des modules effectifs du milieu de substitution de Cosserat . . . . .	92
<b>4.7</b>	<b>Quelques remarques et perspectives . . . . .</b>	<b>93</b>

---

Les milieux généralisés comprennent les milieux de degré supérieur, qui se basent sur l'introduction des gradients d'ordre supérieur du champ de déplacement ou de quelques variables constitutives caractérisant la plasticité, dommage, etc., et les milieux d'ordre supérieur, qui introduisent des degrés de liberté supplémentaires, souvent de type cinématique. L'archétype de chaque type de ces théories des milieux continus enrichis est la théorie de gradient de déformation par Mindlin (Mindlin and Eshel, 1968), d'une part, et le modèle micromorphe par Eringen (Eringen and Suhubi, 1964), d'autre part. Une hiérarchie complète des milieux d'ordre supérieur et de degré supérieur est actuellement disponible pour la modélisation de l'effet de la taille sur le comportement mécanique des matériaux et de structures (Forest and Sievert, 2006; Forest, 2009; Hirschberger and Steinmann, 2009). Le modèle micromorphe incorpore 9 degrés de liberté supplémentaires dans le cas 3D, qui représentent la rotation et la distorsion d'une triade de directions attachées à chaque point. Il représente une des formulations les plus générales qui peuvent être utilisées pour décrire le comportement linéaire et non-linéaire dépendant de l'effet de taille de nombreux matériaux, comme les mousses solides ainsi que les matériaux cristallins et poreux (Dillard et al., 2006; Neff and Forest, 2007).

Deux obstacles principaux à l'usage des modèles de tels milieux sophistiqués sont l'interprétation physique des degrés de liberté supplémentaires et l'identification des nombreux paramètres supplémentaires apparaissant dans les lois de comportement du modèle. Les milieux généralisés sont toujours considérés comme des milieux *avec microstructure* sans donner précisément le lien entre la loi de comportement phénoménologique et la microstructure détaillée du matériau. La mécanique des matériaux hétérogènes et les méthodes d'homogénéisation sont utilisées largement pour déduire les propriétés effectives du matériau classique de Cauchy en partant de la description d'un volume élémentaire représentatif. L'extension de ces méthodes aux milieux généralisés établirait des définitions claires des degrés de liberté macroscopiques et fournirait une manière systématique de déterminer les paramètres supplémentaires au niveau macro du matériau. La technique d'homogénéisation existe déjà dans la construction du modèle de poutre de Timoshenko–Cosserat (modèle 1D), et modèle de plaque Mindlin (modèle 2D) (Altenbach et al., 2010). Dans le cas 3D des milieux généralisés, elle a été proposée dans (Gologanu et al., 1997; Forest, 1998; Forest, 1999) dans le but de construire un modèle effectif de milieu généralisé à partir du matériau hétérogène classique de Cauchy par le moyen des méthodes d'homogénéisation d'ordre supérieur. Ces techniques d'homogénéisation doivent être bien distinguées d'autres sujets de recherche qui consistent à considérer un modèle généralisé à tous les deux niveaux microscopique et macroscopique. Pour l'instant, l'homogénéisation des composites de Cosserat a été étudiée dans (Forest et al., 2001; Liu and Hu, 2003; Xun et al., 2004). Le présent travail se concentre sur la construction d'un milieu global du second-gradient ou micromorphe à partir d'un matériau hétérogène de Cauchy au niveau micro. L'approche utilisant un tel milieu généralisé est nécessaire lorsque de forts gradients de déformation se développent à l'échelle macroscopique, plus précisément, lorsque la longueur d'onde de variation des champs macroscopiques n'est pas suffisamment grande par rapport à la dimension des hétérogénéités.

Dans ce but, des conditions aux limites quadratiques appliquées sur un VER ont été premièrement proposées dans (Gologanu et al., 1997; Forest and Sab, 1998a) pour construire successivement un milieu global du second-gradient et de Cosserat. Elles représentent une extension des conditions affines classiques utilisées dans la théorie d'homogénéisation classique (Besson et al., 2009). Elles ont été utilisées pour identifier les raideurs d'ordre supérieur, typiquement la rigidité de flexion, qui sont nécessaires pour rendre compte de l'effet de taille des fibres dans les composites sous des gradients macroscopiques de déformation significativement grands, dans (Ostoja-Starzewski et al., 1999b; Bouyge et al., 2001a; Bouyge et al., 2002b; Sansalone et al., 2006; Chen et al., 2009; Anthoine, 2010). Les approches

de Cosserat sont bien adaptées particulièrement pour décrire le comportement effectif des matériaux du génie civil et des matériaux granulaires, comme montré dans (Trovalusci and Masiani, 2003; Goddard, 2008; Salerno and de Felice, 2009; Besdo, 2010).

Une telle procédure d'homogénéisation d'ordre supérieur a été utilisée en combinaison avec la méthode nommée éléments finis au carré,  $FE^2$ , pour laquelle la loi de comportement à chaque point matériel de la structure considérée est remplacée par la résolution d'un problème aux limites sur la cellule élémentaire de matériau hétérogène. Cette méthode est très coûteuse au niveau numérique mais fournit la possibilité de s'attaquer aux problèmes non-linéaires sans écrire les lois de comportement explicites macroscopiques dans le modèle de milieu généralisé. Dans (Feyel, 2003), le modèle de Cosserat est utilisé au niveau macro pour représenter un composite fibre-matrice et les conditions aux limites quadratiques et cubiques proposées dans (Forest and Sab, 1998a) sont appliquées à chaque cellule élémentaire. Dans les références (Geers et al., 2001; Kouznetsova et al., 2002b; Kouznetsova et al., 2004c), le milieu macroscopique visé est un milieu du second gradient, les conditions aux limites quadratiques sont suffisantes. Plus récemment, un milieu global micromorphe a été considéré dans (Forest, 2002; Jänicke et al., 2009; Jänicke and Diebels, 2009) qui représente actuellement l'extension la plus générale du modèle homogène classique.

Pourtant, dans la plupart des cas, les procédures étendues d'homogénéisation proposées restent encore heuristiques et plusieurs questions sont encore ouvertes : l'existence d'un volume élémentaire représentatif en présence de conditions aux limites non-homogènes, les propriétés du champ local de fluctuation dans le cas des conditions macroscopiques polynômiales, comme récemment mentionné par (Yuan et al., 2008), et la contribution de cette fluctuation dans la lemme de Hill-Mandel étendu. L'objectif de ce travail est d'illustrer que la prescription des conditions polynômiales mène à un état d'énergie convergée et bien défini sur la cellule élémentaire qui peut être utilisé pour identifier les propriétés effectives d'un milieu homogène généralisé. La déviation du champ local par rapport au chargement polynômial sera caractérisée afin d'estimer la contribution de cette fluctuation au travail des forces internes du milieu effectif.

Ce chapitre est organisé comme suit : la deuxième section discutera les différentes techniques d'homogénéisation disponibles pour construire un modèle effectif du second gradient à partir d'un matériau composite de Cauchy, et mettra en évidence leurs limitations actuelles. Dans la troisième section, l'approche est généralisée pour le milieu global micromorphe. Un polynôme est proposé afin de prescrire les mesures de déformation généralisées au niveau global sur la cellule élémentaire. Une stratégie de calcul est décrite dans la quatrième section pour définir la notion de volume élémentaire représentatif en appliquant les conditions aux limites non-homogènes à deux matériaux composites : élastique et élasto-plastique.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet des publications (Trinh and Forest, 2010; Forest and Trinh, 2011).

## 4.1 Homogénéisation au second ordre

L'objectif de cette méthode d'homogénéisation est de remplacer un matériau de Cauchy micro-hétérogène  $V_\infty$  par un milieu équivalent homogène avec les coordonnées  $\underline{\mathbf{X}}$  de son point matériel global. On suppose qu'un volume élémentaire  $V(\underline{\mathbf{X}})$ , de volume  $V$ , peut être attaché à chaque point matériel  $\underline{\mathbf{X}}$ . Les points locaux dans  $V(\underline{\mathbf{X}})$  sont caractérisés par les coordonnées locales  $\underline{\mathbf{x}}$ . Pour simplifier, les volumes élémentaires  $V(\underline{\mathbf{X}})$  sont supposés avoir la même morphologie des phases. Chacun peut être obtenu par la translation d'une cellule élémentaire de référence donnée  $V(\underline{\mathbf{0}})$ .

#### 4.1.1 Modèle du second gradient et la méthode des développements asymptotiques multi-échelles

Le modèle du second gradient est basé sur l'introduction du premier et second gradient du champ de déplacement,  $\underline{U}(\underline{X})$ . En particulier, la densité de travail des forces internes prend la forme suivante :

$$p^{(i)}(\underline{U}) = \underline{\sigma} : \underline{U} \otimes \nabla_X + \underline{\underline{M}} : \underline{U} \otimes \nabla_X \otimes \nabla_X \quad (4.1)$$

où  $\underline{\sigma}$  est le tenseur symétrique des contraintes simples (ou classiques) et  $\underline{\underline{M}}$  est le tenseur des contraintes supérieures ou des doubles contraintes qui sont symétriques par rapport aux deux derniers indices. Il faut noter qu'il y a une stricte équivalence entre le modèle à gradient de déformation et celui second gradient de déplacement en vertu des relations de compatibilité (Mindlin and Eshel, 1968). Les tenseurs de contraintes satisfont l'équation d'équilibre de la quantité de mouvement ci-dessous :

$$\underline{\tau} \cdot \nabla_X = 0, \quad \text{avec} \quad \underline{\tau} = \underline{\sigma} - \underline{\underline{M}} \cdot \nabla_X \quad (4.2)$$

en absence de forces volumiques ni d'accélération. La loi de comportement lie les tenseurs du premier et du second gradient de déplacement aux tenseurs des contraintes correspondantes.

La méthode des développements asymptotiques multi-échelles a été utilisée dans (Boutin, 1996b) pour déduire une telle loi de comportement dans le cas de composites linéaires élastiques avec une microstructure périodique. Dans ce but, le champ local  $\underline{u}(\underline{x})$  à l'intérieur du volume élémentaire est développé sous la forme :

$$\underline{u}(\underline{x}, \underline{X}) = \underline{u}_0(\underline{x}, \underline{X}) + \epsilon \underline{u}_1(\underline{x}, \underline{X}) + \epsilon^2 \underline{u}_2(\underline{x}, \underline{X}) + \epsilon^3 \underline{u}_3(\underline{x}, \underline{X}) + \dots \quad (4.3)$$

où  $\epsilon = l/L$  est un petit paramètre défini comme le rapport de la taille typique  $l$  de l'hétérogénéité dans le composite et la longueur d'onde  $L$  de la variation des champs macroscopiques. Dans le cadre de cette contribution, les coordonnées locales représentent un zoom  $\underline{x} = \underline{X}/\epsilon$  autour du point matériel  $\underline{X}$ . Les champs  $\underline{u}_i$  peuvent être considérés comme les solutions d'une série de problèmes aux limites sur la cellule élémentaire :

$$\underline{u}(\underline{x}, \underline{X}) = \underline{U}(\underline{X}) + \epsilon \underline{\underline{A}}_1(\underline{x}) : \underline{U} \otimes \nabla_X + \epsilon^2 \underline{\underline{A}}_2(\underline{x}) : \underline{U} \otimes \nabla_X \otimes \nabla_X + \epsilon^3 \underline{\underline{A}}_3(\underline{x}) : \underline{U} \otimes \nabla_X \otimes \nabla_X \otimes \nabla_X + \dots \quad (4.4)$$

où les tenseurs  $\underline{\underline{A}}_i$  sont les tenseurs de localisation calculés en résolvant les problèmes auxiliaires avec des conditions aux limites adaptées. Ils sont des fonctions périodiques des coordonnées locales. L'application de la loi élastique linéaire comme la loi de comportement locale à l'intérieur de la cellule élémentaire et le calcul des contraintes de Cauchy classiques délivrent les modules élastiques d'ordre supérieur du milieu du second gradient au niveau global.

Cette méthode d'expansion asymptotique fournit la loi constitutive liant les contraintes  $\underline{\tau}$  aux gradients de premier, second et troisième ordre du champ de macro-déplacement, comme il se doit. En effet, si  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\underline{M}}$  sont linéairement liés aux premiers et seconds gradients de déplacement, le tenseur de contraintes  $\underline{\tau}$  doit dépendre également du gradient de troisième ordre du déplacement d'après la définition dans (4.2). Ce fait a été peu noté dans la littérature.

#### 4.1.2 Les exigences pour l'homogénéisation au second ordre

Dans le contexte de la théorie d'homogénéisation classique, par exemple suivant la méthode multi-échelle asymptotique, les degrés de liberté de déplacement au point matériel



$\underline{\mathbf{X}}$  sont définis comme la valeur moyenne du champ local de déplacement dans une cellule élémentaire  $V(\underline{\mathbf{X}})$  :

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}) = \langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} = \frac{1}{V} \int_{V(\underline{\mathbf{X}})} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) dV = \frac{1}{V} \int_{V_\infty} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) H_V(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) dV \quad (4.5)$$

où  $H_V$ , la fonction indicatrice associée au domaine  $V(\underline{\mathbf{0}})$ , prend la valeur 1 pour les points à l'intérieur de  $V(\underline{\mathbf{0}})$  et 0 pour les autres points. En conséquence, en supposant une régularité suffisante du champ local de déplacement, on a :

$$\underline{\mathbf{U}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{X}}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{U}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}} = \frac{1}{V} \int_{V_\infty} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \frac{\partial H_V}{\partial \underline{\mathbf{X}}}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V(\underline{\mathbf{X}})} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \underline{\mathbf{n}} dV = \frac{1}{V} \int_{V(\underline{\mathbf{X}})} \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} dV \quad (4.6)$$

où  $\underline{\mathbf{n}}$  est le vecteur normal extérieur au bord du domaine  $V(\underline{\mathbf{X}})$ , consultez (Mei et al., 1996) pour une discussion plus détaillée de tels théorèmes. On obtient le résultat :

$$\underline{\mathbf{U}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{X}}} = \langle \underline{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} \quad (4.7)$$

De la même façon, en supposant à nouveau la régularité suffisante du champ local de déplacement, on a :

$$\underline{\mathbf{U}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{X}}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{X}}} = \langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle \quad (4.8)$$

Un matériau hétérogène peut être remplacé par un modèle homogène du second gradient dans la mesure où il existe une équivalence énergétique entre les deux milieux, sur le plan du travail des forces internes associées à chaque milieu :

$$\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} = \underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\underline{\mathbf{X}}) : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{X}}) + \underline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\underline{\mathbf{X}}) : \underline{\boldsymbol{\kappa}}(\underline{\mathbf{X}}) \quad (4.9)$$

Cette formulation représente une extension de la condition Hill–Mandel, très bien connue dans la théorie d'homogénéisation classique (Rodin, 2007).

Les conditions (4.7), (4.8), (4.9) sont les seules exigences qu'il faut remplir par une procédure d'homogénéisation au second ordre. En particulier, la prescription des conditions aux limites généralisées sur la cellule élémentaire ne doit pas contredire les relations (4.7, 4.8) entre les champs local et global des gradients. Les définitions explicites doivent aussi être compatibles avec la condition (4.9).

### 4.1.3 Polynôme quadratique proposé

Le polynôme quadratique a été proposé initialement dans (Gologanu et al., 1997; Forest, 1998; Kruch and Forest, 1998; Forest and Sab, 1998a; Enakoutsa and Leblond, 2009) en élargissant les conditions affines usuelles de chargement d'un volume élémentaire afin d'intégrer l'effet de second gradient dans le procédé d'homogénéisation. Un tel développement polynômial représente une alternative aux méthodes de développements asymptotiques multi-échelle dans le but de déduire des propriétés d'ordre supérieur, son avantage est d'utiliser une manière simple, sans compter du comportement local linéaire ou non-linéaire du matériau composite.

Considérons au début un champ de déplacement quadratique prescrit à tout un volume élémentaire  $V$  :

$$\underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}} : (\underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}}), \quad u_i^* = E_{ij} x_j + \frac{1}{2} D_{ijk} x_j x_k, \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in V(\underline{\mathbf{X}}) \quad (4.10)$$

où  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  est un tenseur constant d'ordre deux et  $\underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}}$ , ayant les propriétés de symétrie  $D_{ijk} = D_{ikj}$ , est un tenseur constant d'ordre trois. Quand  $\underline{\mathbf{X}}$  est pris comme le centre géométrique de  $V(\underline{\mathbf{X}})$ , on calcule successivement :

$$\langle \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}} \cdot \underline{\mathbf{X}}, \quad \langle \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} = \underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}} \quad (4.11)$$

La prescription du champ complet de déplacement (4.10) peut être utilisée comme une extension du modèle d'homogénéisation de Voigt et Taylor, pour lequel seuls les déformations sont supposées homogènes, afin d'estimer les propriétés effectives du second gradient. Néanmoins, comme dans le cas classique, les propriétés obtenues sont trop rigides en général. Par conséquent, les conditions quadratiques peuvent être limitées au bord  $\partial V(\underline{\mathbf{X}})$  de la cellule élémentaire :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{D}} : (\underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}}), \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial V(\underline{\mathbf{X}}) \quad (4.12)$$

Cette prescription détermine entièrement les déformations moyennes engendrées dans la cellule élémentaire, en vertu du théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} &= \frac{1}{V} \int_{\partial V(\underline{\mathbf{X}})} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \underline{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{V} \int_{\partial V(\underline{\mathbf{X}})} \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \underline{\mathbf{n}} dS \\ &= \frac{1}{V} \int_{V(\underline{\mathbf{X}})} \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} dV = \frac{1}{V} \int_{V(\underline{\mathbf{X}})} (\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{x}}) dV = \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Cependant, on ne peut rien dire en général sur la valeur moyenne du second gradient du déplacement dans le volume élémentaire matériel

$$\langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\underline{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}}) \otimes \underline{\mathbf{n}} dS \quad (4.14)$$

car le gradient du champ de déplacement n'est a priori ni contrôlé ni connu sur la frontière de la cellule, à partir des seules conditions de Dirichlet. En fait, l'usage des conditions aux limites quadratiques de Dirichlet permet le contrôle des déformations moyennes mais ne donne qu'une information partielle sur les valeurs de leurs gradients  $(\underline{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}})(\underline{\mathbf{x}})$  sur le bord. Par conséquent, aucune information ne peut être obtenue sur les valeurs de la moyenne de second gradient et cette moyenne ne peut donc pas être directement contrôlée par les coefficients du polynôme quadratique. Pour cette raison, la condition  $\langle \underline{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle_V = \underline{\mathbf{D}}$  doit être considérée comme une restriction supplémentaire à imposer à la solution du problème aux limites sur le volume élémentaire. Jusqu'à présent, aucun schéma numérique rigoureux n'a été proposé pour imposer cette restriction supplémentaire de manière correcte. Cela sera discuté plus dans la section 4.1.5.

Dans l'homogénéisation classique, il est bien connu que l'application de la condition aux limites de déformation homogène sur une cellule élémentaire de milieu périodique conduit à des modules d'élasticité trop rigides (Kanit et al., 2006). Les conditions aux limites périodiques introduisant une fluctuation qui est périodique aux bords sont les conditions les mieux adaptées. Une fluctuation doit également être introduite dans le cas des conditions quadratiques de chargement. Un champ de fluctuation est ainsi ajouté sous la forme :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{D}} : (\underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}}) + \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}), \quad u_i = E_{ij}x_j + \frac{1}{2} D_{ijk}x_jx_k + v_i, \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in V(\underline{\mathbf{X}}) \quad (4.15)$$

où  $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}})$  est le champ de fluctuation. Le champ de fluctuation peut contribuer ensuite aux moyennes de déformation et de gradient de déformation :

$$\langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} = \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{X}} + \langle \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} \quad (4.16)$$

$$\langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} = \underline{\mathbf{D}} + \langle \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} \quad (4.17)$$

Si la fluctuation est périodique, i.e. si elle prend la même valeur en deux points homologues de la bordure de la cellule élémentaire, les moyennes des premier et second gradients du champ de fluctuation disparaissent et les moyennes de déformation et de gradient de déformation peuvent être contrôlées par les coefficients du polynôme. Une telle hypothèse est compatible avec l'homogénéisation au premier ordre classique caractérisée par la prescription du tenseur  $\underline{E}$ . Mais il n'y pas aucune raison d'avoir une telle exigence de périodicité en présence du chargement de gradient de déformation, comme l'ont indiqué (Yuan et al., 2008). D'autre part, la condition périodique sur le champ de fluctuation doit être accompagnée par des conditions statiques correspondantes afin d'obtenir un problème aux limites bien posé. Dans la théorie d'homogénéisation classique, la propriété d'anti-périodicité du vecteur contrainte aux points homologues est requise :

$$\underline{v}(\underline{x}^-) = \underline{v}(\underline{x}^+), \quad \underline{t}(\underline{x}^+) = -\underline{t}(\underline{x}^-) \quad (4.18)$$

où  $\underline{t} = \underline{\sigma}^\pm \cdot \underline{n}^\pm$  est le vecteur contrainte et  $\underline{x}^\pm$  sont des points homologues au bord. Quand un gradient de déformation est appliqué à une cellule élémentaire, les vecteurs contraintes ne sont plus anti-périodiques en général, comme le montre la figure 4.2 où les vecteurs de traction ne sont plus anti-périodiques, l'illustration la plus visible est sur la deuxième ligne (le contenu de ces figures sera détaillé dans la suite). En flexion par exemple, la contrainte peut être périodique dans une direction mais ne l'est pas dans la direction perpendiculaire à l'axe neutre.

Quand le champ local de déplacement est exprimé sous la forme (4.15), ce qui est toujours possible, la condition Hill-Mandell (4.9) devient :

$$< \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) >_{V(\underline{X})} = < \underline{\sigma}(\underline{x}) >_{V(\underline{X})} : \underline{E} + \underline{D} : < \underline{\sigma}(\underline{x}) \otimes \underline{x} >_{V(\underline{X})} + < \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{v}(\underline{x}) \otimes \underline{\nabla}_x >_{V(\underline{X})} \quad (4.19)$$

Lorsque la contribution  $< \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{v}(\underline{x}) \otimes \underline{\nabla}_x >_{V(\underline{X})}$  de la fluctuation au travail global des forces internes disparaît, les définitions suivantes des tenseurs de contraintes et de déformations globales sont légitimes :

$$< \underline{u}(\underline{x}) \otimes \underline{\nabla}_x >_{V(\underline{X})} = \underline{E}, \quad \underline{K}(\underline{X}) = < \underline{u}(\underline{x}) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x >_{V(\underline{X})} = \underline{D} \quad (4.20)$$

$$\underline{\Sigma}(\underline{X}) := < \underline{\sigma}(\underline{x}) >_{V(\underline{X})}, \quad \underline{M}(\underline{X}) := < \underline{\sigma}(\underline{x}) \otimes \underline{x} >_{V(\underline{X})} \quad (4.21)$$

ainsi le tenseur des contraintes supérieures est lié au premier moment de la distribution du champ des contraintes de Cauchy à l'intérieur du volume élémentaire.

Lorsque le champ de fluctuation  $\underline{v}$  est périodique et que le vecteur-contrainte est anti-périodique, la contribution de la fluctuation au travail global des forces internes disparaît clairement. Les définitions précédentes des contraintes et de déformation sont donc licites. Tel est le cas si  $\underline{D} = 0$ , i.e dans le cadre d'homogénéisation classique. Pourtant, dans le cas général  $\underline{D} \neq 0$ , la fluctuation n'est pas nécessairement périodique et également, il n'y a pas de raison d'espérer la disparition de sa contribution à l'énergie globale. En effet, les identifications (4.20) et (4.21) ne sont licites que dans le cas où le déplacement est quadratique sur tout le volume, comme dans (4.10). Lorsque le polynôme est prescrit seulement sur la bordure de la cellule suivant (4.15), rien n'assure que  $< \underline{u}(\underline{x}) \otimes \underline{\nabla}_x \otimes \underline{\nabla}_x >_{V(\underline{X})} = \underline{D}$ , comme discuté au-dessus.

Donc, en général, l'énergie associée à la fluctuation ne s'annule pas :

$$< \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{v}(\underline{x}) \otimes \underline{\nabla}_x >_{V(\underline{X})} \neq 0 \quad (4.22)$$

Cette contribution sera examinée dans la section 4.4 et 4.5. Lorsque cette contribution est connue, les tenseurs des contraintes au niveau global sont définis d'une manière implicite par (4.19).

Ainsi, des conditions supplémentaires sur la fluctuation restent à définir afin que la moyenne du gradient de déformation puisse être prescrite sur la cellule élémentaire. C'est aujourd'hui encore une question ouverte.

#### 4.1.4 Le lien entre l'approche à couple de contraintes et l'approche de Cosserat

Les auteurs dans (Forest, 1998; Ostoja-Starzewski et al., 1999b; Bouyge et al., 2001a; Bouyge et al., 2002b) ont adopté une version restreinte du polynôme (4.10) qui s'écrit, dans le cas 2D, comme on l'a vu au chapitre précédent :

$$u_1^* = -K_{31}x_1x_2 - \frac{K_{32}}{2}x_2^2, \quad u_2^* = K_{32}x_1x_2 + \frac{K_{31}}{2}x_1^2 \quad (4.23)$$

où la matrice  $K_{ij}$  peut être interprétée comme le tenseur global de la courbure du milieu effectif à couple de contraintes ou de Cosserat, comme dans (Forest and Sab, 1998a). La théorie des couples de contraintes est un cas particulier du modèle du second gradient pour lequel seul l'effet du gradient de rotation matérielle, i.e la partie anti-symétrique du gradient de déplacement, est pris en compte. La théorie de Cosserat est obtenue une fois que la microrotation est différente de la rotation matérielle et traitée comme un degré de liberté indépendant. La théorie de Cosserat se différencie de la théorie des couples de contraintes de la même manière que la poutre Timoshenko se différencie de la poutre d'Euler-Bernoulli, dans le cas 1D. C'est pourquoi le modèle de Cosserat possède une mesure généralisée de déformation qui est la différence entre la micro-rotation et la rotation matérielle. Il est montré dans (Forest and Sab, 1998a; Branke et al., 2009) que cette rotation relative peut être imposée à la cellule élémentaire par le moyen d'un polynôme d'ordre 3, qui prend la forme suivante dans le cas 2D :

$$u_1^* = \hat{D}(x_2^3 - 3x_1^2x_2), \quad u_2^* = -\hat{D}(x_1^3 - 3x_1^2x_2) \quad (4.24)$$

avec un seul coefficient supplémentaire  $\hat{D}$ .

Dans le cas 3D, il est prouvé dans (Forest, 1999) qu'un polynôme d'ordre 4 est nécessaire pour contrôler la trace du tenseur de courbure qui disparaît dans le cas 2D et ne peut pas être prescrite par le moyen du polynôme quadratique.

#### 4.1.5 Les limitations des approches actuelles

L'analyse de la littérature montre qu'il est difficile en général de respecter les conditions simultanées sur la fluctuation, i.e. de garantir :

$$\langle \underline{u}(\underline{x}) \otimes \nabla_x \otimes \nabla_x \rangle_{V(\underline{X})} = \underline{D} \quad \text{et} \quad \langle \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{v}(\underline{x}) \otimes \nabla_x \rangle_{V(\underline{X})} = 0 \quad (4.25)$$

Dans les références (Gologanu et al., 1997; Zybell et al., 2009; Jänicke et al., 2009), les conditions non-homogènes sont directement prescrites sur le bord de cellule élémentaire, conformément à l'équation (4.12). Suite à la discussion précédente, la moyenne du second gradient ne peut pas être contrôlée. Autrement dit, il n'y a aucune relation directe entre la moyenne de second gradient et les coefficients du polynôme quadratique dans (4.12). Cela entraîne que la définition (4.21) des contraintes d'ordre supérieur reste seulement une estimation dont la qualité n'est pas connue.

Dans le cas spécial du polynôme de flexion (4.23) et pour les micro-structures spécifiques considérées dans (Forest and Sab, 1998a; Bouyge et al., 2001a; Feyel, 2003), l'application de périodicité (4.18) semble suffisante et le champ de fluctuation trouvé numériquement ne contribue pas à l'énergie globale. Avec les conditions de flexion, et pour la symétrie spéciale

de la cellule élémentaire, clairement, les conditions anti-périodiques (4.18) pour le vecteur-contrainte sont encore pertinentes. Mais ce n'est qu'approximatif dans le cas du polynôme d'ordre 3, exigé pour le modèle de Cosserat complet.

Dans la stratégie  $FE^2$ , utilisée dans (Geers et al., 2001; Kouznetsova et al., 2002b; Kouznetsova et al., 2004c), il est essentiel que les conditions (4.25) soient vérifiées. C'est pourquoi, les auteurs posent la question de la réalisation de ces conditions (4.25). Ils adoptent les conditions périodiques (4.18), avec une restriction linéaire heuristique supplémentaire sur la fluctuation  $\underline{v}$  (dérivée de la définition heuristique (A5) dans (Kouznetsova et al., 2002b)). Cependant, cette condition supplémentaire n'assure pas que la moyenne du second gradient du champ de déplacement soit contrôlé par  $\underline{D}$  dans (4.25), comme reconnu par les auteurs. D'autre part, la condition anti-périodique du vecteur-contrainte, tacitement utilisée dans ces contributions, permet que la fluctuation ne contribue pas au travail global des forces internes, qui est la deuxième condition dans (4.25) (condition (34) dans (Kouznetsova et al., 2002b)). Cette condition anti-périodique toutefois devrait être abandonnée en présence des gradients globaux des contraintes et de déformation.

Le fait que les conditions périodiques usuelles (4.18) ne puissent pas être utilisées dans le contexte d'homogénéisation au second ordre a été analysée par les auteurs dans (Yuan et al., 2008). Ces auteurs ont proposé au lieu de cette condition usuelle de périodicité une combinaison d'un terme affine multiplié par un terme périodique suggérée par l'observation des correcteurs dans les développements asymptotiques multi-échelles (Boutin, 1996b). Mais, cette fluctuation, malgré son amélioration comparée à l'hypothèse périodique, reste approximative et limitée à l'usage dans le contexte linéaire élastique, pour lequel la méthode asymptotique reste efficace.

Ainsi, aucun schéma théorique ni numérique ne semble disponible dans la littérature qui puisse assurer strictement les exigences (4.25). Seuls des schémas approximatifs ont été proposés. Dans ce travail, on n'essaiera pas d'établir de telles conditions. Au lieu de cela, nous allons utiliser le polynôme comme condition aux limites sur un grand volume élémentaire représentatif, et enregistrer l'évolution des contributions généralisées. Cette méthode va permettre de déterminer la fluctuation de manière exacte et d'étudier ses propriétés. La méthodologie permettra également d'identifier le comportement effectif suivant un schéma implicite.

## 4.2 Approche micromorphe

La théorie micromorphe fut proposée la première fois par (Eringen and Suhubi, 1964; Mindlin, 1964) en introduisant des degrés de liberté de micro-déformation par un tenseur du second ordre généralement non-symétrique,  $\underline{\chi}(\underline{X})$ , ajoutés aux degrés de liberté de déplacement,  $\underline{U}(\underline{X})$ . Il faut noter que le champ de microdéformation n'est pas nécessairement un champ compatible, c'est-à-dire qu'il ne dérive pas systématiquement d'un champ de vecteurs. Le développement du gradient de micro-déformation

$$\underline{K}(\underline{X}) = \underline{\chi}(\underline{X}) \otimes \nabla_X \quad (4.26)$$

contribue au travail des forces internes au stockage d'énergie. Il y a également un prix énergétique à payer pour que la micro-déformation puisse partir de la macro-déformation, caractérisé par la mesure de déformation relative :

$$\underline{e}(\underline{X}) = \underline{U}(\underline{X}) \otimes \nabla_X - \underline{\chi}(\underline{X}) \quad (4.27)$$

Le modèle micromorphe comprend la théorie de gradient de déformation comme un cas limite si la restriction :

$$\underline{\chi} \equiv \underline{U} \otimes \nabla_X \iff \underline{e} \equiv 0 \quad (4.28)$$

est réalisée (Forest, 2009).

#### 4.2.1 La définition des degrés de liberté micromorphes

Une signification cinématique du modèle micromorphe a été proposée par Germain (Germain, 1973), que l'on paraphrase ici :

*Dans une théorie qui prend en compte la microstructure, à partir du point de vue macroscopique de la mécanique des milieux continus, chaque particule représente un point matériel  $\underline{\mathbf{X}}$ , mais ses propriétés cinématiques peuvent être définies de façon plus raffinée. Du point de vue microscopique, une particule apparaît elle-même comme un milieu continu  $V(\underline{\mathbf{X}})$  d'extension infinitésimale. Appelons  $\underline{\mathbf{X}}$  son centre de masse et  $\underline{\mathbf{x}}$  un point de  $V(\underline{\mathbf{X}})$ . Comme  $V(\underline{\mathbf{X}})$  est un petit volume, il est naturel de considérer le développement de Taylor du champ local de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}})$  par rapport à  $\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}$  et aussi, en première approximation, de s'arrêter au premier terme :*

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{X}}) = \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}) + \underline{\chi} \cdot (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \quad (4.29)$$

*La signification physique de cette hypothèse est claire : on postule que l'on peut obtenir une description suffisante du mouvement relatif des différents points constituant la particule si l'on suppose que ce mouvement relatif est une déformation homogène.*

Pour un champ local donné  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{X}})$ , ou sous la forme réduite  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}})$ , au lieu d'effectuer explicitement le développement de Taylor mentionné ci-dessus, il a été proposé dans (Forest and Sab, 1998a; Forest, 2002; Jänicke et al., 2009) de déterminer le champ de déformation homogène (4.29) qui est le plus proche au champ de déplacement actuel, dans le cadre d'un problème de minimisation :

$$\min_{\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}), \underline{\chi}(\underline{\mathbf{X}})} \int_{V(\underline{\mathbf{X}})} \left\| \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}) - \underline{\chi}(\underline{\mathbf{X}}) \cdot (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \right\|^2 dV \quad (4.30)$$

pour un point matériel donné  $\underline{\mathbf{X}}$ . Le procédé de minimisation est simple et fournit, en prenant  $\underline{\mathbf{X}}$  comme le centre de  $V(\underline{\mathbf{X}})$  :

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}) = \langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} \quad (4.31)$$

$$\underline{\chi}(\underline{\mathbf{X}}) = \langle (\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}})) \otimes (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} = \langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} \quad (4.32)$$

avec

$$\underline{\mathbf{A}} = \langle (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \otimes (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} \quad (4.33)$$

La relation (4.31) est connue en homogénéisation classique et définit le déplacement macroscopique comme le moment zéro du champ local de déplacement. La formule (4.32) a le mérite de définir sans ambiguïté les degrés de liberté micromorphes au niveau macro comme le premier moment du champ local de déplacement, le tenseur  $\underline{\mathbf{A}}$  étant le tenseur du moment quadratique de la cellule élémentaire. Elle représente une amélioration de la description macroscopique qui intègre les effets supplémentaires des microstructures.

Si le champ de déplacement est une transformation linéaire,  $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{x}}$ , la microdéformation est calculée comme :

$$\chi_{ij} = \langle u_i x_j \rangle A_{kj}^{-1} = \langle E_{il} x_l x_k \rangle A_{kj}^{-1} = E_{il} \langle x_l x_k \rangle A_{kj}^{-1} = E_{ij} \quad (4.34)$$

Elle coïncide donc avec la macro-déformation  $\underline{\mathbf{E}}$ . En particulier, si un mouvement du corps rigide est appliqué à la cellule élémentaire, la micro-déformation se réduira à la rotation appliquée, comme il se doit.

### 4.2.2 Les mesures de déformation d'ordre supérieur

La théorie mécanique exige l'évaluation des gradients macroscopiques des degrés de liberté. Le gradient macroscopique du champ de déplacement est encore donné par la moyenne (4.7). Le gradient de la micro-déformation (5.1) est calculé en utilisant la définition (4.32) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} K_{ijk} &= \frac{\partial}{\partial X_k} \left( \langle (u_i - U_i)(x_l - X_l) \rangle A_{lj}^{-1} \right) \\ &= \langle \frac{\partial}{\partial x_k} ((u_i - U_i)(x_l - X_l)) \rangle A_{lj}^{-1} + \langle (u_i - U_i)(x_l - X_l) \rangle \frac{\partial}{\partial X_k} A_{lj}^{-1} \\ &= \langle u_{i,k}(x_l - X_l) \rangle A_{lj}^{-1} + \langle (u_i - U_i) \rangle A_{kj}^{-1} + \langle (u_i - U_i)(x_l - X_l) \rangle A_{lj,k}^{-1} \end{aligned} \quad (4.35)$$

En prenant en compte (4.31), et en supposant que  $\underline{\mathbf{A}}$  ne varie pas d'un point matériel à l'autre, le gradient de micro-déformation prend la forme simple :

$$\underline{\mathbf{K}}^T(\underline{\mathbf{X}}) = \langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \otimes (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \rangle \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1}, \quad K_{ijk} = \langle u_{i,k}(x_l - X_l) \rangle A_{lj}^{-1} \quad (4.36)$$

où la transposition du tenseur d'ordre 3 est appliquée aux deux derniers indices. Par conséquent, le gradient de micro-déformation peut être interprété comme le premier moment de la distribution du gradient local de déplacement.

La déformation relative doit également être évaluée et prend la forme de la différence :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{X}}) = \langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} - \langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \rangle_{V(\underline{\mathbf{X}})} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} \quad (4.37)$$

Lorsque le champ de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}$  est une transformation linéaire, incluant le mouvement de corps rigide, la déformation relative et le gradient de micro-déformation s'annulent, comme il le faut.

### 4.2.3 Polynôme proposé comme condition aux limites

Comme discuté dans la section 4.1.4, on considère le polynôme de degré 4 suivant :

$$u_i^*(\underline{\mathbf{x}}) = E_{ij}x_j + \frac{1}{2}D_{ijk}x_jx_k + \frac{1}{3}D_{ijkl}x_jx_kx_l + \frac{1}{4}D_{ijklm}x_jx_kx_lx_m, \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in V(0) \quad (4.38)$$

qui s'écrit sous la forme intrinsèque suivante :

$$\underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{D}} : (\underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}}) + \frac{1}{3} \underline{\mathbf{D}} : (\underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}}) + \frac{1}{4} \underline{\mathbf{D}} :: (\underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}}), \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in V(0) \quad (4.39)$$

où les coefficients sont des tenseurs d'ordre 2 à d'ordre 5.

Les mesures de déformation micromorphes au niveau macro sont maintenant successivement calculées pour un tel polynôme sur la cellule élémentaire référentielle  $V(0)$  :

$$\langle \underline{\mathbf{u}}^* \otimes \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \rangle_{V(0)} = \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{D}} : \underline{\mathbf{A}} \quad (4.40)$$

$$\underline{\chi} = \langle \underline{\mathbf{u}}^* \otimes \underline{\mathbf{x}} \rangle_{V(0)} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} = \underline{\mathbf{E}} + \frac{1}{3} \underline{\mathbf{D}} : \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1}, \quad \chi_{ij} = E_{ij} + \frac{1}{3} D_{ipqr} A_{pqrk} A_{kj}^{-1} \quad (4.41)$$

$$\underline{\mathbf{K}}^T = \underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{D}} : \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1}, \quad K_{ipq} = \langle u_{i,q}x_r \rangle_{V(0)} A_{rp}^{-1} = D_{iqp} + D_{iqklm} A_{klmr} A_{rp}^{-1} \quad (4.42)$$

Ces formules simples sont valides si le système de coordonnées est tel que  $\langle \underline{x} \rangle = \underline{X} = \underline{0}$ , et que les moyennes  $\langle x_i \rangle$ ,  $\langle x_i x_j x_k \rangle$  et  $\langle x_i x_j x_k x_l x_m \rangle$  disparaissent identiquement. Le moment géométrique d'ordre 4  $\underline{\underline{A}}$  de la cellule élémentaire a été introduit :

$$\underline{\underline{A}} = \langle \underline{x} \otimes \underline{x} \otimes \underline{x} \otimes \underline{x} \rangle_{V(0)} \quad (4.43)$$

Il est intéressant de noter que la déformation relative n'est liée qu'au polynôme d'ordre 3 :

$$\underline{e} = \underline{\underline{D}} : \underline{A} - \frac{1}{3} \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{A}} \cdot \underline{A}^{-1} \quad (4.44)$$

Les formules de (4.40) à (4.42) donnent des relations linéaires directes entre les coefficients du polynôme et les mesures de déformation du milieu micromorphe effectif. Elles ont été utilisées dans (Jänicke et al., 2009) pour prescrire un gradient de micro-déformation donné  $\underline{\underline{K}}$  ou une déformation relative à la cellule élémentaire. Cependant, le nombre des coefficients dans le polynôme est différent en général du nombre des composantes des tenseurs de mesures de déformations généralisées. Par exemple, le gradient de micro-déformation  $K_{ipq}$  ne peut pas être contrôlé seulement par les coefficients  $D_{ipq}$  du polynôme quadratique car  $D_{ipq}$  est symétrique par rapport à deux dernières indices, contrairement à  $K_{ipq}$ . La sélection des coefficients pertinents du polynôme d'ordre supérieur reste encore à faire. Dans cette thèse, on ne considérera que le coefficient  $D_{ijk}$  et quelques coefficients  $D_{ijkl}$ .

Pourtant, le polynôme (4.39) ne sera en général pas appliqué au volume entier, pour aller au-delà de l'hypothèse de Taylor, mais plutôt à la bordure  $\partial V$  du volume élémentaire hétérogène donné  $V$  :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{\underline{D}} : (\underline{x} \otimes \underline{x}) + \frac{1}{3} \underline{\underline{D}} : (\underline{x} \otimes \underline{x} \otimes \underline{x}) + \frac{1}{4} \underline{\underline{D}} :: (\underline{x} \otimes \underline{x} \otimes \underline{x} \otimes \underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \partial V \quad (4.45)$$

Dans ce cas, la relation (4.40) est encore valide mais il faut modifier la relation (4.42). Il faut noter aussi qu'il n'est pas possible de calculer la micro-déformation à partir du champ de déplacement prescrit au bord. Par contre, le gradient global de micro-déformation peut quant à lui être calculé en connaissant le déplacement prescrit au bord, en utilisant le même système de coordonnées comme préalablement mentionné, et en choisissant une translation constante telle que  $\underline{U}(0) = 0$  :

$$\begin{aligned} K_{ipq} &= \frac{1}{V} A_{rp}^{-1} \int_{V(0)} u_{i,q} x_r dV = \frac{1}{V} A_{rp}^{-1} \int_{V(0)} (u_i x_r)_{,q} dV - \frac{1}{V} A_{qp}^{-1} \int_{V(0)} u_i dV \\ &= \frac{1}{V} A_{rp}^{-1} \int_{V(0)} (u_i x_r)_{,q} dV = \frac{1}{V} A_{rp}^{-1} \int_{\partial V(0)} u_i x_r n_q dS \\ &= \frac{1}{V} A_{rp}^{-1} \int_{\partial V(0)} u_i^* x_r n_q dS = \frac{1}{V} A_{rp}^{-1} \int_{V(0)} u_{i,q}^* x_r dV + \frac{1}{V} A_{qp}^{-1} \int_{V(0)} u_i^* dV \end{aligned} \quad (4.46)$$

ainsi, l'expression est différente de (4.42) par la valeur moyenne de  $\underline{u}^*$ . On trouve :

$$\underline{\underline{K}}^T = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{A}} \cdot \underline{A}^{-1} + \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{A}} \otimes \underline{A}^{-1} + \underline{\underline{D}} :: \underline{\underline{A}} \otimes \underline{A}^{-1} \quad (4.47)$$

$$K_{ipq} = D_{ipq} + D_{iqklm} A_{klmr} A_{rp}^{-1} + D_{ijk} A_{jk} A_{qp}^{-1} + D_{ijklm} A_{jklm} A_{qp}^{-1} \quad (4.48)$$

Finalement, le champ local réel sera la superposition du polynôme et de la fluctuation

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^*(\underline{x}) + \underline{v}(\underline{x}) \quad (4.49)$$

La fluctuation conduit à des contributions supplémentaires aux mesures micromorphes de déformations qui sont obtenues par la substitution de  $\underline{v}$  à  $\underline{u}$  dans les formules (4.32), (4.36) et (5.7). Ces contributions en générale ne disparaissent pas.



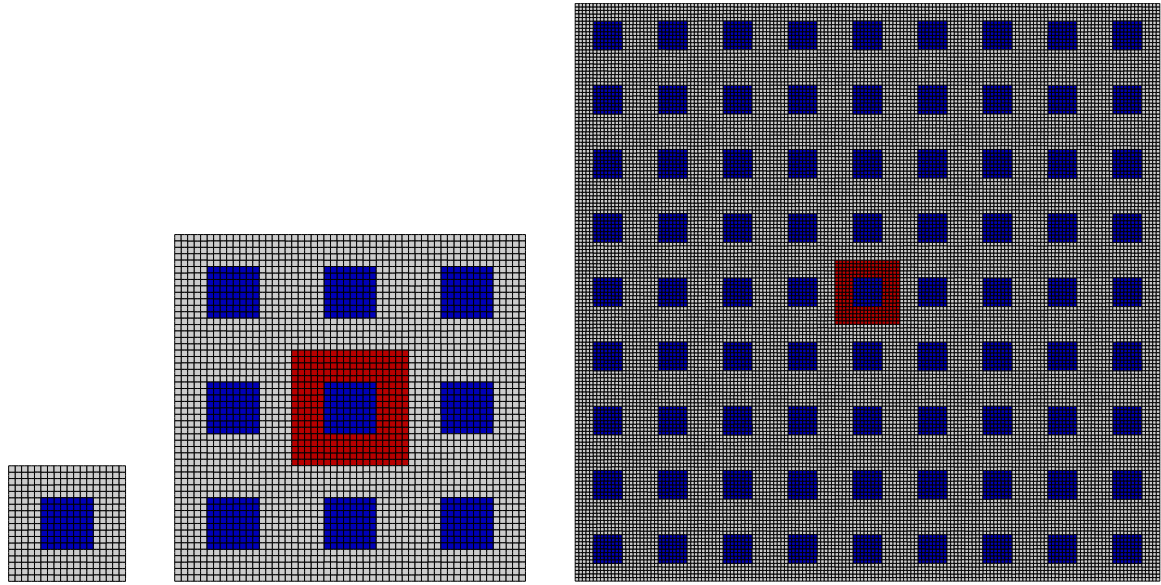


FIG. 4.1 – Maillage par éléments finis d’une cellule élémentaire  $1 \times 1$  (à gauche), d’un ensemble de  $3 \times 3$  cellules (au milieu) et d’un groupe de  $9 \times 9$  cellules (à droite). La phase matricielle est grise et les inclusions sont bleues. La couleur rouge est utilisée pour localiser la cellule élémentaire centrale.

### 4.3 Le volume élémentaire représentatif pour des conditions aux limites non-homogènes

#### 4.3.1 La convergence de l’énergie pour les polynômes quadratiques et cubiques dans le cas linéaire élastique

La méthode, consistant à augmenter le nombre des cellules élémentaires dans le VER considéré d’une micro-structure périodique, soumise à des conditions aux limites polynômiales sur le bord extérieur, comme illustré sur la figure (4.1), a été utilisée dans (Kouznetsova et al., 2004a) afin de montrer que les modules effectifs d’ordre supérieur identifiés dépendent du nombre de cellules dans le volume. Cette méthode numérique sera utilisée ici d’une façon différente. On considère un VER sous la forme d’un assemblage de  $N \times N$  cellules élémentaires périodiques. Le nombre  $N$  est augmenté afin d’appliquer les conditions aux limites polynômiales de plus en plus loin de la cellule élémentaire centrale, dans le but d’atteindre une taille de VER pour laquelle l’état d’énergie de la cellule élémentaire ne varie plus. De cette façon, premièrement, on peut vérifier si un tel état convergé existe pour différents types de polynômes, et, deuxièmement, la différence du champ réel de déplacement par rapport au champ polynômial appliqué, c’est-à-dire le champ de fluctuations qui est objet des discussions des sections précédentes, peut être déterminée.

Par exemple, un composite périodique est considéré avec la cellule élémentaire de la figure 4.1 (à gauche) composée d’une cellule carrée avec une inclusion carrée au centre. Les assemblages de  $3 \times 3$  et  $9 \times 9$  cellules sont également illustrés sur la figure 4.1. Les deux matériaux sont supposés élastiques, le matériau gris est la phase dure (module de Young  $E = 200000$  MPa), tandis que les inclusions sont molles ( $E = 20000$  MPa). Le coefficient Poisson est identique pour les deux matériaux :  $\nu = 0.3$ . La fraction volumique des inclusions est 20%. La longueur du côté de cellule élémentaire est 1 mm. Les assemblages plus grands sont des multiples de cette longueur. Les conditions de déformation plane sont imposées dans les calculs par élément finis suivants. Des éléments carrés quadratiques à huit noeuds, avec

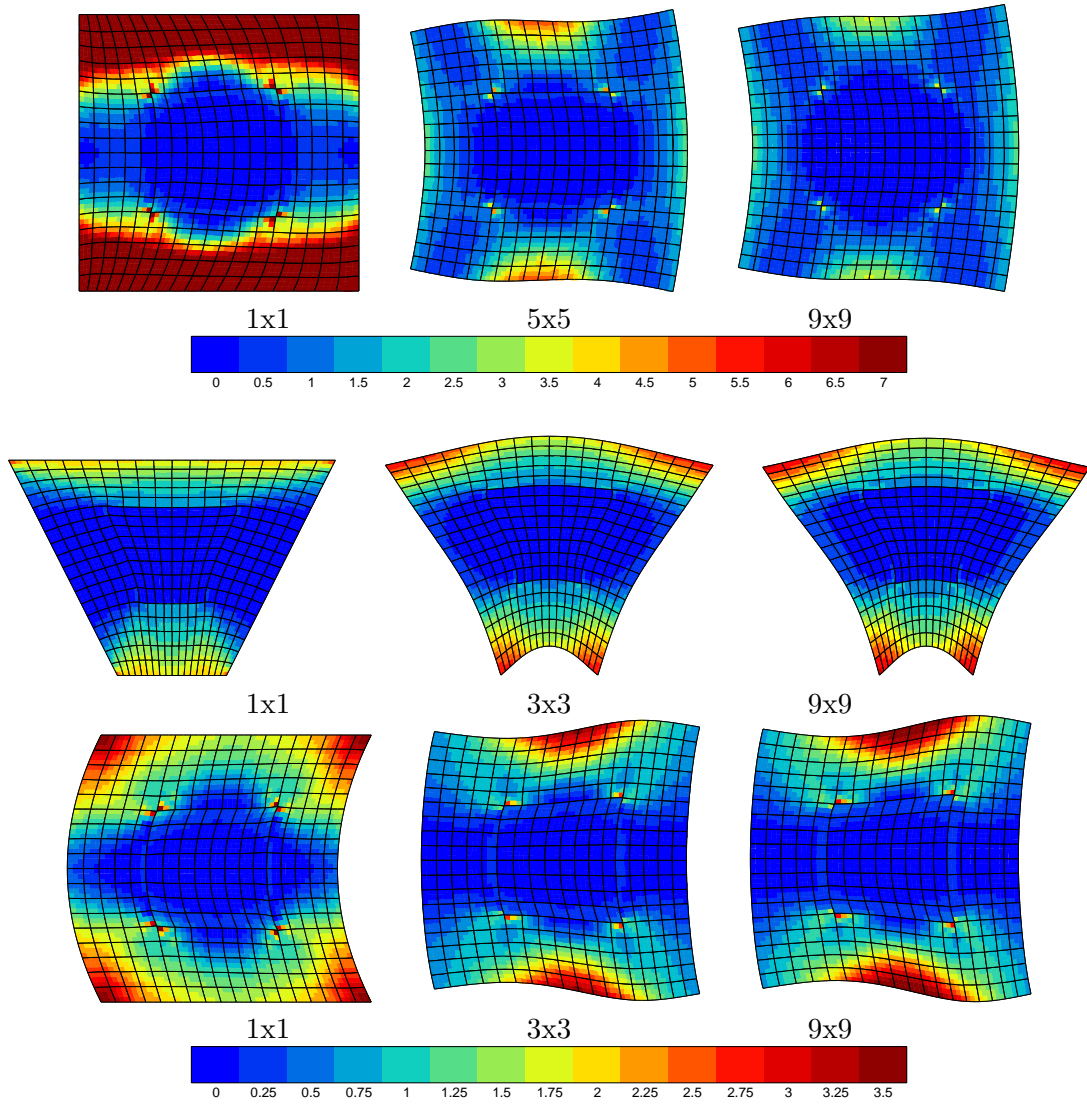


FIG. 4.2 – Le champ d'énergie de déformation normalisée  $W(\underline{x})/\overline{W}$  dans la cellule élémentaire centrale en appliquant les conditions limites quadratiques de Dirichlet(4.12) sur le bord extérieur d'un groupe de  $N \times N$  cellules, pour  $D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$  (en haut),  $D_{112} = 1 \text{ mm}^{-1}$  (au milieu),  $D_{122} = 1 \text{ mm}^{-1}$  (en bas). Le matériau considéré est le composite de la figure 4.1.

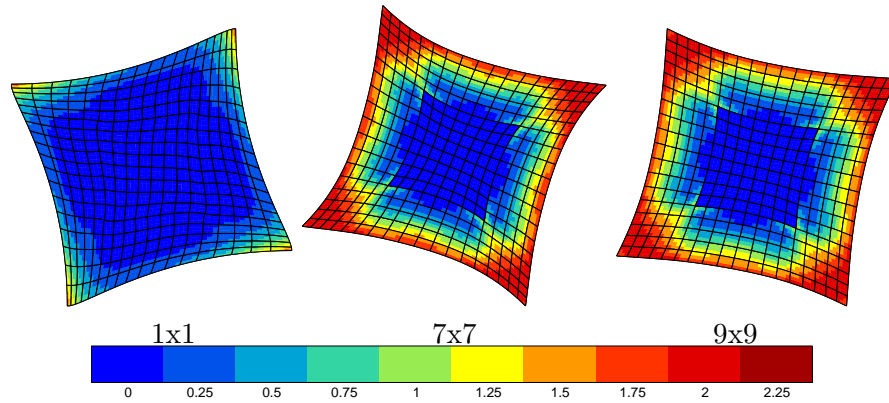


FIG. 4.3 – Le champ d'énergie de déformation normalisée dans la cellule élémentaire centrale en appliquant les conditions limites cubiques de Dirichlet(4.24) sur le bord extérieur d'un groupe de  $N \times N$  cellules, pour  $\hat{D} = 1$ . Le matériau considéré est le composite de la figure 4.1.

neuf points de Gauss, sont utilisés pour ces calculs.

La bordure extérieure des assemblages de  $1 \times 1$ ,  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ , ...,  $9 \times 9$  cellules est soumise aux conditions aux limites de Dirichlet quadratiques (4.12) avec les valeurs successives  $D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$ ,  $D_{112} = 1 \text{ mm}^{-1}$ ,  $D_{122} = 1 \text{ mm}^{-1}$ , les autres coefficients restants sont mis à zéro. Ces combinaisons de coefficients sont pertinentes pour le cas 2D. Sur la figure 4.2, on montre le champ de densité d'énergie élastique normalisée par la densité moyenne d'énergie,  $W(\underline{x})/\bar{W}$  où  $W(\underline{x}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{x})$  est le travail local des forces internes et  $\bar{W} = \langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle_{9 \times 9}$  est la moyenne de l'énergie élastique dans la cellule centrale au sein de l'assemblage de  $9 \times 9$  cellules, l'énergie résulte de l'application des conditions de Dirichlet non-homogènes. La figure montre que, pour les trois conditions de chargement considérée, un champ convergé d'énergie élastique existe dans la cellule centrale. Cet état stable est obtenu pour un assemblage de  $5 \times 5$  cellules ou plus. Les conditions quadratiques introduisent de forts effets de bords qui ne dérangent pas le champ dans la cellule centrale si la bordure extérieure est suffisamment lointaine. Cette propriété est semblable à la notion classique de volume élémentaire représentatif.

Comme le montrent les états déformés de la figure 4.2 (à gauche), les côtés de la bordure extérieure restent rectilignes ou deviennent paraboliques. Au contraire, les côtés des cellules centrales ne sont plus rectilignes ni paraboliques mais subissent une ondulation supplémentaire correspondant à la fluctuation  $\underline{v}(\underline{x})$  par rapport au champ polynômial. Il faut noter en particulier le type de déformation en flexion provoqué par le chargement  $D_{112}$ .

Dans le cas où le polynôme cubique (4.24) est prescrit sur la bordure extérieure, un état convergé a été également détecté comme montré dans la figure 4.3.

La moyenne des déformations  $\langle \underline{\varepsilon} \rangle$  dans la cellule élémentaire est trouvée nulle pour les conditions quadratiques et cubiques considérées, comme il se doit. Les composantes du gradient de micro-déformation  $K_{ijk}$  provoqué par l'application du polynôme  $D_{ijk}$  peuvent être calculées en utilisant la définition (4.36) appliquée à l'état convergé de la cellule élémentaire. Les valeurs correspondantes sont données dans la table 4.1. Il montre qu'un seul terme non-nul du polynôme mène à plusieurs composantes non nulles du gradient de micro-déformation. Par exemple, le coefficient  $D_{112}$  provoque une contribution principale  $K_{112}$ , mais aussi des contributions non négligeables  $K_{211}$  et  $K_{222}$ . Le chargement  $D_{111}$  provoque principalement des composantes  $K_{122}$  et  $K_{212}$ . Grâce à la linéarité du problème, il est possible de déterminer une combinaison des valeurs de  $D_{ijk}$  qui mène aux composantes souhaités

	$D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$	$D_{112} = 1 \text{ mm}^{-1}$	$D_{122} = 1 \text{ mm}^{-1}$
$K_{111}$	0.037	0.	-0.276
$K_{112}$	0.	1.070	0.
$K_{122}$	-0.434	0.	0.474
$K_{211}$	0.	-0.820	0.
$K_{212}$	0.122	0.	0.172
$K_{222}$	0.	-0.688	0.

TAB. 4.1 – Les composantes globales du gradient de micro-déformation provoqué sur la cellule élémentaire par l’application successive des coefficients du polynôme quadratique à la bordure lointaine de l’assemblage des cellules.

pour le gradient de micro-déformation, et il est donc possible de contrôler  $\underline{K}$  sur la cellule élémentaire.

#### 4.3.2 Cas particulier d’un milieu micro-homogène

Le polynôme linéaire  $u_i^* = E_{ij}x_j$  de l’homogénéisation classique présente la propriété remarquable suivante : quand il est appliqué au bord d’un volume élémentaire composé d’un matériau homogène, la solution du problème aux limites est lui-même un polynôme linéaire. Autrement dit, la fluctuation  $\underline{v}$  dans (4.15) disparaît si le milieu est homogène. Est-ce que cette propriété est conservée dans le cas de l’homogénéisation d’ordre supérieur ?

Une cellule élémentaire carrée de côté 1 mm a été choisie d’une façon arbitraire. Le polynôme (4.12) a été prescrit à un seul volume et à un assemblage de  $N \times N$  cellules identiques élémentaires. Le champ d’énergie normalisée de déformation est donné sur la figure 4.4. Il montre que la propriété du polynôme affine ne s’étend pas au polynôme quadratique, pour les trois conditions de chargement considérées. Pourtant, une solution convergée existe bel et bien dans la cellule centrale qui est différente du polynôme quadratique appliqué. Autrement dit, la fluctuation ne disparaît pas même dans le cas de milieu homogène.

Ce fait peut être vérifié facilement en cherchant les conditions sur les coefficients pour que le polynôme  $u_i = \frac{1}{2}D_{ijk}x_jx_k$  ait une solution du problème aux limites dans un milieu élastique homogène. On verrait qu’une solution polynomiale dans un milieu homogène n’est possible que dans des conditions très particulières des valeurs des modules, du polynôme et des symétries du milieu.

Au contraire, on peut vérifier le polynôme cubique (4.24) admet une solution admissible pour un milieu isotrope homogène. La fluctuation correspondante disparaît identiquement dans le cas de milieu homogène, comme montré dans la figure 4.5. Nous n’avons toutefois pas vérifié ce fait dans le cas du polynôme d’ordre trois complet.

On peut considérer que c’est une première exigence du schéma d’homogénéisation que de fournir le même milieu homogène équivalent que le milieu de départ lorsque celui-ci est homogène. Ce n’est pas le cas en apparence de la méthode retenue. Toutefois il semble que la correction apportée par (Li, 2011) permette de lever ce paradoxe.

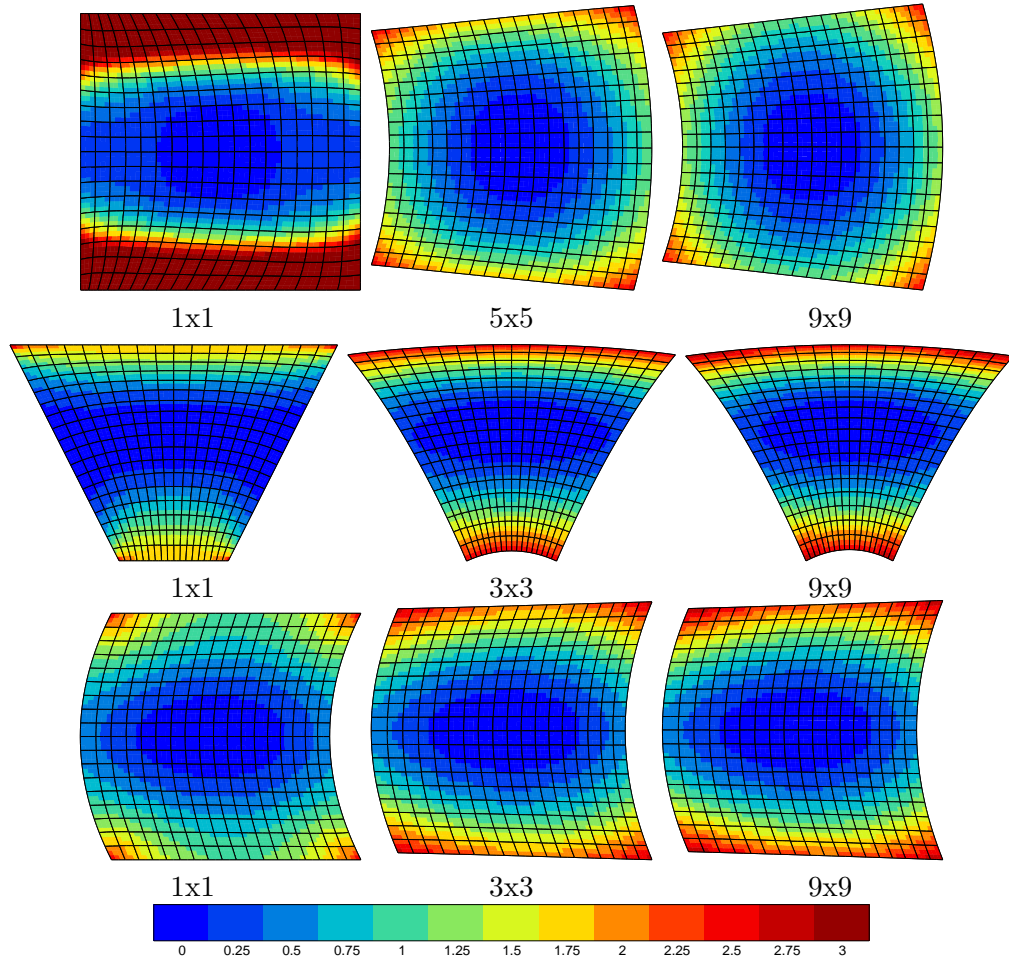


FIG. 4.4 – Le champ de la densité d'énergie élastique normalisée de déformation  $W(\mathbf{x})/\bar{W}$  dans la cellule élémentaire centrale lors de l'application des conditions aux limites de Dirichlet (4.12) à la bordure lointaine d'un assemblage de  $N \times N$  cellules, pour  $D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$  (en haut),  $D_{112} = 1 \text{ mm}^{-1}$  (au milieu),  $D_{122} = 1 \text{ mm}^{-1}$  (en bas). Le matériau considéré est homogène. Une cellule élémentaire de la taille  $l = 1 \text{ mm}$  a été choisie.



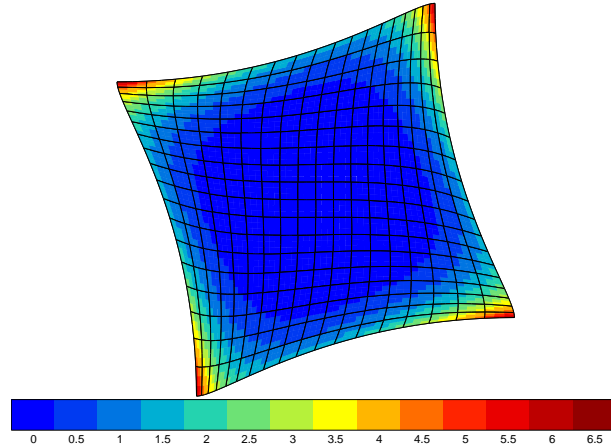


FIG. 4.5 – Le champ de l'énergie normalisée de déformation  $W(\underline{x})/\bar{W}$  dans la cellule élémentaire centrale lors de l'application des conditions aux limites Dirichlet (4.24) à la bordure lointaine d'un assemblée  $N \times N$  des cellules, pour  $\hat{D} = 1 \text{ mm}^{-2}$ . Le matériau considéré est homogène. Une cellule élémentaire arbitraire de la taille  $l = 1 \text{ mm}$  a été choisie.

### 4.3.3 La convergence du schéma d'homogénéisation pour les milieux élasto-plastiques

L'atout principal de l'extension proposée de la technique d'homogénéisation classique est son applicabilité à n'importe quel comportement local de matériau, en particulier, pour le comportement de matériau non-linéaire. Cette possibilité a d'abord été explorée dans (Forest, 1999) et (Feyel, 2003) pour le comportement du milieu effectif de Cosserat, dans le cas d'une matrice élasto-plastique de composite. La réponse d'une cellule élémentaire à l'application d'une courbure moyenne peut être utilisée pour identifier les paramètres matériels des lois de comportement non-linéaire du milieu généralisé au niveau global, ou donner une amélioration de la stratégie numérique  $FE^2$ . Cependant, dans les travaux précédents, la fluctuation a été supposée périodique. Dans ce travail de thèse, les conditions de chargement plus générales sont considérées, incluant les conditions de chargement de tous les gradients de déformation en 2D, et aucune hypothèse n'est faite a priori sur le type de fluctuation.

Dans ce but, la stratégie numérique pour la détermination de la taille de volume élémentaire représentatif, présentée dans les deux sections précédentes, est appliquée au même composite mais en proposant le comportement élastique-plastique pour le matériau de la matrice de forme grille. Les lois de comportement de l'élasto-plasticité se basent sur l'écrouissage isotrope linéaire classique  $J_2$ . La loi d'écrouissage est  $R = R_0 + Hp$ , où  $p$  est la déformation plastique cumulée. On suppose que la limite d'élasticité initiale est  $R_0 = 100 \text{ MPa}$ , et le module d'écrouissage linéaire est  $H = 2000 \text{ MPa}$ . L'assemblage des  $N \times N$  cellules subit, à ces bords extérieurs, les conditions aux limites quadratiques (4.12), avec successivement  $D_{111}, D_{112}, D_{122}$  variant de 0 à  $0.1 \text{ mm}^{-1}$ , les autres coefficients restent nuls. Le chargement maximal de  $0.1 \text{ mm}^{-1}$  est tel que les valeurs des déformations plastiques restent compatibles avec l'hypothèse des petites déformations.

La figure 4.6 montre que le champ cumulé de déformation plastique converge si le nombre  $N$  des cellules élémentaires du volume élémentaire augmente. L'état déformé final est vraiment différent du cas linéaire de la figure 4.2. On peut observer le développement d'un champ de fluctuation lors qu'on compare la figure avec l'application directe des conditions quadratiques sur la cellule élémentaire. La plasticité est trouvée localisée dans les zones étroites.

Il faut noter qu'une telle convergence de l'état de déformation plastique n'est pas observée

si la plasticité est parfaite, i.e. sans écrouissage, parce que les conditions de chargement non-linéaire provoquent une forte localisation de la déformation plastique qui est de plus en plus intense lors de l'augmentation de la taille de l'assemblée. En particulier, la bande de cisaillement commence aux coins de la cellule carrée et se croisent sur la cellule centrale. On ne peut pas définir dans ce cas un VER pour les conditions quadratiques.

## 4.4 Caractérisation du champ de fluctuations

La méthode numérique proposée donne la possibilité de caractériser totalement le champ de fluctuation à partir des simulations numériques. Dans ce but, on calcule la fluctuation  $\underline{v}$  de l'état convergé de cellule élémentaire centrale, par rapport au polynôme quadratique imposé :

$$\underline{v}^{FE}(\underline{x}) = \underline{u}^{FE}(\underline{x}) - \frac{1}{2} \underline{D} : \underline{x} \otimes \underline{x} \quad (4.50)$$

où l'exposant  $FE$  indique le résultat obtenu par élément finis.

On peut comparer les valeurs de fluctuation  $\underline{v}^{FE}$  aux points homologues sur les côtés gauche et droit, en haut et en bas, de la cellule élémentaire centrale de la figure 4.1 (à gauche). Les courbes correspondantes sont dessinées pour les deux composantes  $v_1, v_2$  et les trois conditions de chargement  $D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$ ,  $D_{112} = 1 \text{ mm}^{-1}$  and  $D_{122} = 1 \text{ mm}^{-1}$ , sur les figures 4.7, 4.8 et 4.9. Pour la condition de chargement  $D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$  et  $D_{122} = 1 \text{ mm}^{-1}$ , on trouve que  $v_1$  est périodique tandis que  $v_2$  est anti-périodique. Pour le cas de chargement  $D_{112} = 1 \text{ mm}^{-1}$ ,  $v_2$  est périodique tandis que  $v_1$  est anti-périodique. Par conséquent, la superposition des fluctuations associées à un polynôme complet quadratique, i.e. incluant tous les termes, mènera à une fluctuation non-périodique.

La question de l'anti-périodicité du vecteur-contrainte sur le bord de cellule élémentaire a été posée dans la section 4.1.5. Une réponse précise peut maintenant être donnée à partir des résultats numériques. Le vecteur-contrainte sur les bords verticaux (horizontaux) de la cellule élémentaire de la figure 4.1(gauche) est associé aux composantes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{12}$  ( $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$ ). Ces composantes sont tracées le long des bords horizontaux et verticaux sur la figure 4.10, 4.11 et 4.12, pour les trois conditions de chargement individuelles. Pour les conditions de chargement  $D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$  et  $D_{122} = 1 \text{ mm}^{-1}$ , la composante  $t_2$  du vecteur de traction est trouvée anti-périodique tandis que la composante  $t_1$  est périodique. Le résultat inverse est trouvé pour le chargement  $D_{112} = 1 \text{ mm}^{-1}$ . Encore une fois, l'exemple numérique montre que le vecteur-contrainte n'est généralement pas anti-périodique, contrairement au cas de l'homogénéisation classique.

## 4.5 La contribution globale de la fluctuation à l'énergie et au gradient macroscopique de déformation

L'exemple numérique est également utilisé pour évaluer la contribution du champ de fluctuation à l'énergie globale de déformation à l'intérieur de la cellule centrale. Dans l'homogénéisation périodique classique, on sait que cette contribution est nulle. Est-ce le cas lorsque des conditions quadratiques sont appliquées ? L'énergie de déformation associée au champ de déplacement  $\underline{u} = \underline{u}^* + \underline{v}$  donné par (4.15) est calculée :

$$\begin{aligned} \overline{W} = \langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \rangle &= \langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) \rangle + \langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) \rangle \\ &= \langle \sigma_{ij} x_k \rangle D_{ijk} + \langle \sigma_{ij} v_{i,j} \rangle \\ &= W_D + W_v \end{aligned} \quad (4.51)$$

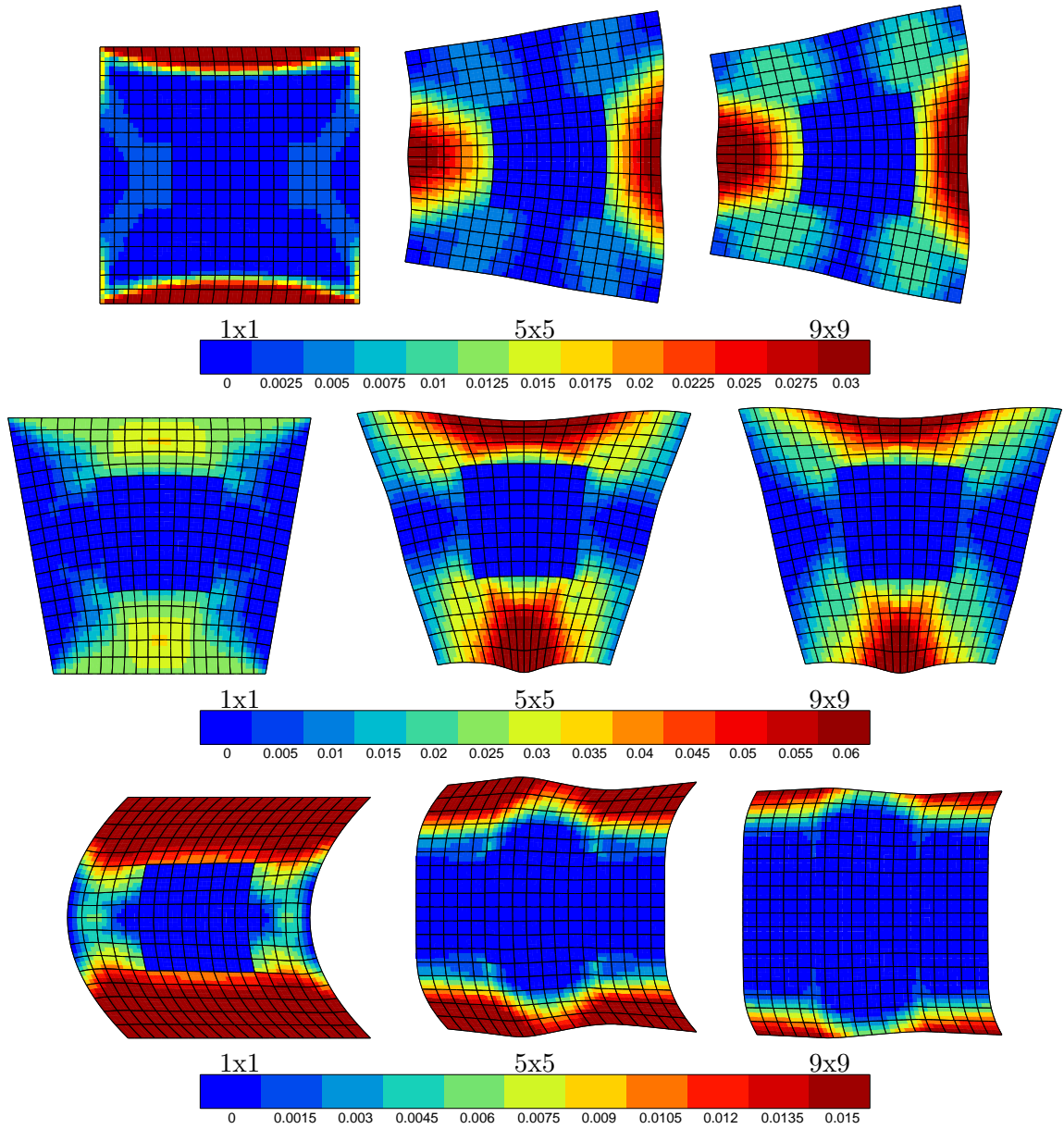


FIG. 4.6 – Champ de déformation plastique cumulée dans la cellule élémentaire centrale lors de l'application des conditions aux limites de Dirichlet quadratiques (4.12) à la bordure extérieure d'un assemblage de  $N \times N$  cellules, pour  $D_{111} = 0.1 \text{ mm}^{-1}$  (en haut),  $D_{112} = 0.1 \text{ mm}^{-1}$  (au milieu),  $D_{122} = 0.1 \text{ mm}^{-1}$  (en bas). La phase matricielle est élastoplastique avec l'écrouissage linéaire. Pour l'illustration, l'état déformé a été grossi par un facteur de 10.



	$\bar{W}$ (MPa)	$W_D$ (MPa)	$W_v$ (MPa)	$ W_v/\bar{W} $
$D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$	461.	1780.	-1319.	2.86
$D_{112} = 1 \text{ mm}^{-1}$	13890.	20965.	-7075.	0.51
$D_{122} = 1 \text{ mm}^{-1}$	1762.	2760.	-998.	0.57

TAB. 4.2 – Moyenne de l'énergie de déformation élastique  $\bar{W}$  sur la cellule élémentaire centrale et les contributions du polynôme et de la fluctuation pour trois conditions globales de chargement.

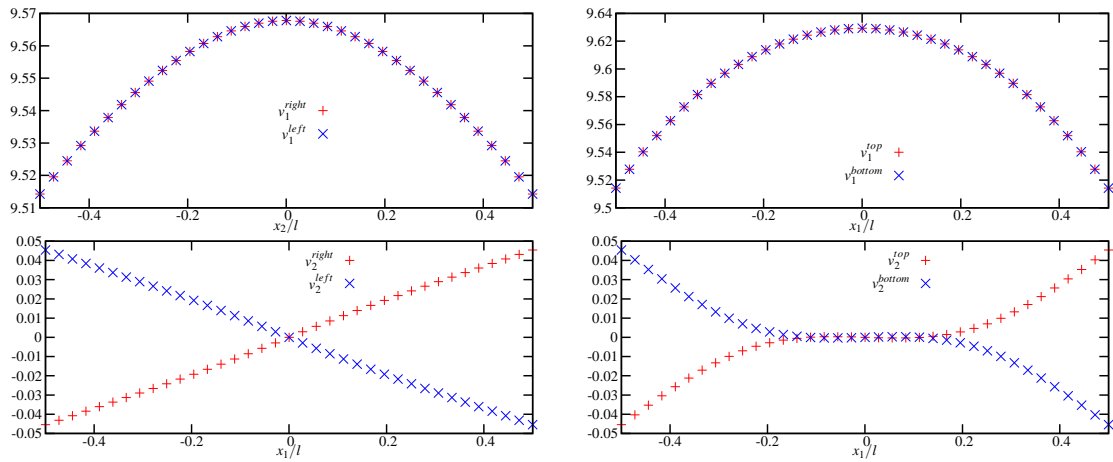


FIG. 4.7 – Composantes du champ de fluctuation  $\underline{v}$  sur les bords de la cellule centrale élémentaire, pour les conditions aux limites quadratiques prescrites loin de celle-ci, avec  $D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$ .

où la moyenne est réalisée sur la cellule élémentaire et les coefficients  $E_{ij} = 0$  ont été pris comme nuls. La contribution due à  $\underline{D}$  est  $W_D$  et celle associée à la fluctuation est  $W_v$ .

Dans l'exemple numérique considéré, l'énergie de déformation associée à la fluctuation est calculée grâce à un post-traitement des simulations par élément finis :

$$W_v = \bar{W}^{FE} - \langle \sigma_{ij}^{FE} x_k \rangle D_{ijk} \quad (4.52)$$

Les différentes contributions sont rapportées dans la table 4.2. Les résultats montrent que la contribution  $W_v$  est non nulle. Loin d'être négligeable, elle représente la moitié, voire plus, de l'énergie totale. La contribution est négative et l'énergie finale de déformation est significativement plus petite que  $W_D$ .

D'une façon similaire, on peut évaluer la contribution de la fluctuation au gradient global de micro-déformation par calcul :

$$\underline{\underline{K}}^T(\underline{v}) = \underline{\underline{K}}^T - \underline{\underline{D}} = \langle \underline{u}^{FE} \otimes \nabla_x \otimes \underline{x} \rangle \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} - \underline{\underline{D}} \quad (4.53)$$

à partir des résultats élément finis et de l'équation (4.42). Elles peuvent être déduites des valeurs de la table 4.1. Encore une fois, loin d'être négligeable, la contribution  $\underline{\underline{K}}(\underline{v})$  représente une part significative du gradient total de micro-déformation.

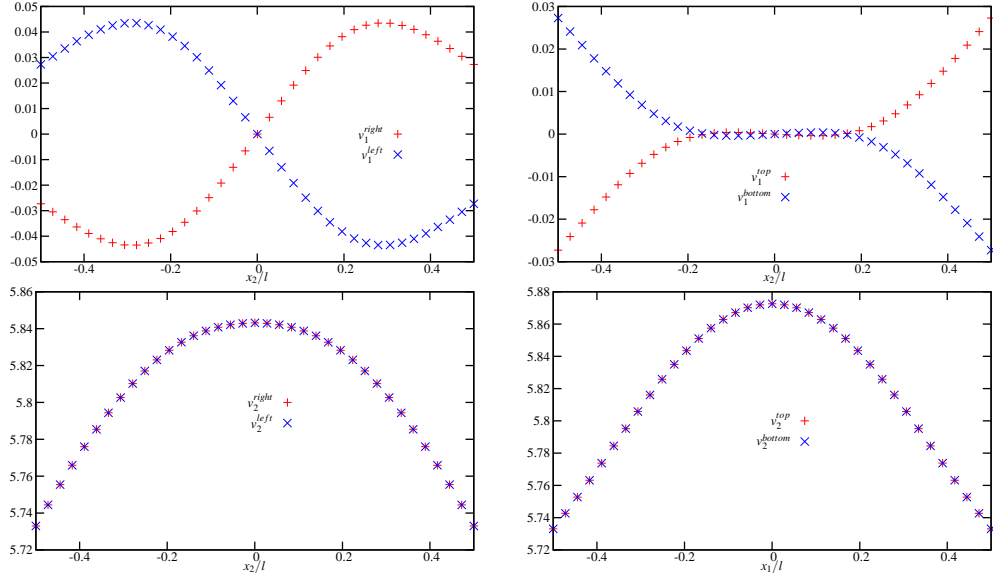


FIG. 4.8 – Composantes du champ de fluctuation  $\underline{v}$  sur les bords de la cellule centrale élémentaire, pour les conditions aux limites quadratiques prescrites loin de celle-ci, avec  $D_{112} = 1 \text{ mm}^{-1}$ .

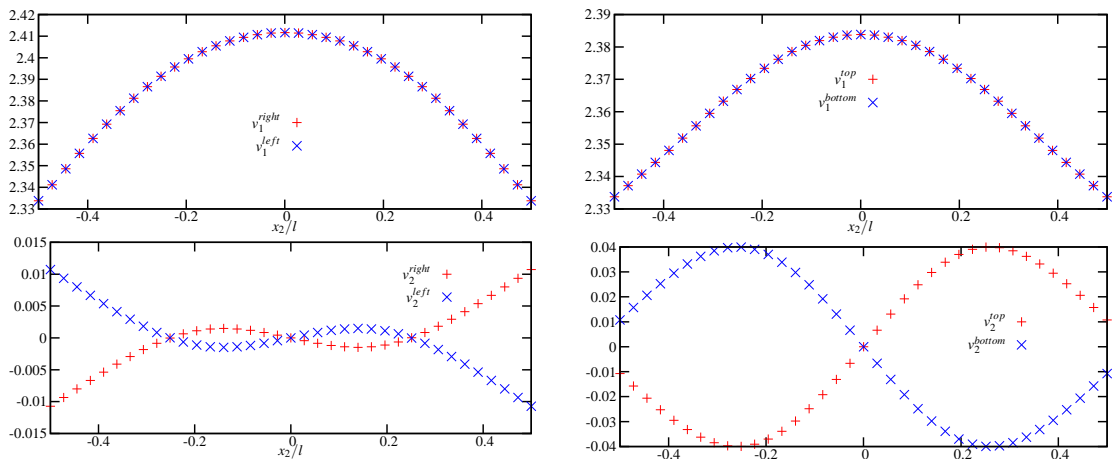


FIG. 4.9 – Composantes du champ de fluctuation  $\underline{v}$  sur les bords de la cellule centrale élémentaire, pour les conditions aux limites quadratiques avec  $D_{122} = 1 \text{ mm}^{-1}$ .

## 4.6 Calculs des modules effectifs d'ordre supérieur

### 4.6.1 Principe du calcul des modules effectifs

Le départ du calcul des modules effectifs est la condition Hill-Mandel généralisée :

$$\langle \sigma : \varepsilon \rangle = \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{K}} \quad (4.54)$$

Dans (Forest and Sab, 1998a; Kouznetsova et al., 2002a) et quelques contributions de la même période, les modules effectifs sont déterminés suivant la relation :

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{A}}^{eff} : \underline{\underline{K}} \quad (4.55)$$

où le tenseur  $\underline{\underline{M}}$  a été formulé explicitement en se basant sur l'hypothèse de fluctuation périodique qui est montrée non-pertinente dans (Yuan et al., 2008). Or, dans cette thèse, une vérification de la périodicité de fluctuation a été réalisée et une fluctuation dite "réelle" a été déterminée et est appliquée au calcul des modules effectifs. Par conséquent, le tenseur  $\underline{\underline{M}}$  n'est plus déterminé d'une façon directe. On revient alors à (4.54) et on introduit successivement les deux tenseurs des modules d'élasticité effectifs d'ordres 4 et 6 :

$$\langle \sigma : \varepsilon \rangle = \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}}^{eff} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{A}}^{eff} : \underline{\underline{K}} \quad (4.56)$$

A partir de cette formulation, on réalise l'identification des modules effectifs de façon similaire à l'homogénéisation classique. Comme expliqué dans les sections précédentes, les variables dans 4.56 sont calculées sur le volume de la cellule élémentaire au centre du VER. Le VER sera chargé plusieurs fois. Les chargements sont choisis pour que chaque fois, une seul composant du tenseur de courbure macroscopique  $\underline{\underline{K}}$  soit non nulle. La moyenne de la densité de l'énergie de déformation correspondante  $\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle$  sur la cellule élémentaire centrale est calculée. Une relation ou plutôt une équation dont l'inconnu est l'un des modules effectifs est établie. Cette procédure continue jusqu'à ce qu'un système d'équations linéaires est rempli. Après une analyse simple, on obtient les modules effectifs. Pour illustrer plus précisément cette procédure, deux exemples de détermination des modules effectifs seront présentées ensuite, l'une pour le milieu de substitution de Cosserat et l'autre pour le milieu de substitution du second gradient.

### 4.6.2 Calcul des modules effectifs du milieu de substitution du second gradient

Dans cette section, un autre milieu de substitution est abordé. C'est le cas de milieu substitutif du second gradient. Le principe de la détermination des modules de rigidité est encore la condition de Hill-Mandel étendue 4.56. A partir de la condition aux limites, nous choisissons le coefficients  $D_{ijk}$  pour contrôler la courbure  $K_{ijk}$  et puis en déduire les modules effectives  $A_{ijklmn}^{eff}$ .

#### Notations

Un matériau orthotrope est considéré. On remplace la notation de  $K_{ijk}$  par  $K_I$ . Les modules effectives sont donc  $A_{IJ}$  avec  $A_{IJ} = A_{JI}$  parce que  $E = A_{IJ}K_IK_J$ . Nous donnons

les notations suivantes afin de simplifier le calcul :

$$\begin{aligned}
 111 &\leftrightarrow 1 \\
 112 &\leftrightarrow 2 \\
 122 &\leftrightarrow 3 \\
 211 &\leftrightarrow 4 \\
 212 &\leftrightarrow 5 \\
 222 &\leftrightarrow 6
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Dans le cas de la symétrie cubique, le comportement du matériau est identique suivant deux directions perpendiculaires, donc nous avons :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= A_{111111} = A_{222222} = A_{66} \\
 A_{12} &= A_{111112} = A_{222221} = A_{222212} = A_{65} = A_{56} \\
 A_{13} &= A_{111122} = A_{222211} = A_{64} = A_{46} \\
 A_{14} &= A_{111211} = A_{222122} = A_{63} = A_{36} \\
 A_{15} &= A_{111212} = A_{222121} = A_{222112} = A_{62} = A_{26} \\
 A_{16} &= A_{111222} = A_{222111} = A_{61} = A_{16} \\
 A_{22} &= A_{112112} = A_{221221} = A_{212212} = A_{55} \\
 A_{23} &= A_{112122} = A_{221211} = A_{212211} = A_{54} = A_{45} \\
 A_{24} &= A_{112211} = A_{221122} = A_{212122} = A_{53} = A_{35}
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Identiquement, nous avons :  $A_{25} = A_{52}$ ,  $A_{26} = A_{51} = A_{15}$ ,  $A_{33} = A_{44}$ ,  $A_{34} = A_{43}$ .

### Prise en compte des valeurs nulles de la matrice

On applique sur la référence d'une rotation d'angle  $180^\circ$ , sur la nouvelle référence, le champ du gradient de déplacement  $(\nabla \underline{u})$  prend la forme :

$$\begin{pmatrix} u'_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{1,2} & u_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & -u_{1,2} \\ -u_{1,2} & u_{2,2} \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

D'autre part,  $K_{ijk} = \langle u_{i,k} x_j \rangle$ , nous faisons un changement de base  $x'_1 = -x_1$ ,  $x'_2 = x_2$ ,  $x'_3 = x_3$ , les valeurs de  $K_{ijk}$  changent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 K'_{111} &\longrightarrow -K_{111} \\
 K'_{112} &\longrightarrow K_{112} \\
 K'_{122} &\longrightarrow -K_{122} \\
 K'_{211} &\longrightarrow K_{211} \\
 K'_{212} &\longrightarrow -K_{212} \\
 K'_{222} &\longrightarrow K_{222}
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Ensuite nous remarquons que l'énergie de déformation  $W$  est une valeur scalaire et  $W = A_{ijkpqr} K_{ijk} K_{pqr}$  (ou  $W = A_{IJ} K_I K_J$ ). En changeant la référence comme mentionné ci-dessus, l'énergie est conservée tandis que les  $K_1$ ,  $K_3$  et  $K_5$  changent la signe, nous obtenons les valeurs nulles des  $A_{IJ}$  :  $A_{12} = A_{14} = A_{16} = A_{23} = A_{25} = A_{34} = A_{36} = 0$ . Pour donner à la matrice

une forme plus simple, on change l'ordre des  $K_{ijk}$ , de (4.58) en le nouvel ordre :

$$\begin{aligned} 111 &\leftrightarrow 1 \\ 122 &\leftrightarrow 2 \\ 212 &\leftrightarrow 3 \\ 112 &\leftrightarrow 4 \\ 211 &\leftrightarrow 5 \\ 222 &\leftrightarrow 6 \end{aligned}$$

Avec ce changement, la forme finale de la matrice est :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{33} & A_{23} & A_{13} \\ 0 & 0 & 0 & A_{23} & A_{22} & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & A_{13} & A_{12} & A_{11} \end{pmatrix}$$

Nous avons 6 constantes de modules élastiques  $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{22}, A_{23}, A_{33}$ .

### Détermination des modules

Les modules effectifs sont calculés en se basant sur la relation :

$$E = \underset{\approx}{\mathbf{K}} : \underset{\approx}{\mathbf{A}} : \underset{\approx}{\mathbf{K}}$$

Où  $E$  est l'énergie de déformation et dans ce cas nous n'imposons que le tenseur de courbure sur la cellule de base (nous avons su comment définir les modules effectifs dans le cas où la déformation moyenne existe).

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5 & K_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{33} & A_{23} & A_{13} \\ 0 & 0 & 0 & A_{23} & A_{22} & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & A_{13} & A_{12} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \end{pmatrix} \\ &= (K_1^2 + K_6^2)A_{11} + (K_2^2 + K_5^2)A_{22} + (K_3^2 + K_4^2)A_{33} + \\ &\quad + 2A_{12}(K_1K_2 + K_5K_6) + 2A_{13}(K_1K_3 + K_4K_6) + 2A_{23}(K_2K_3 + K_4K_5) \end{aligned} \quad (4.61)$$

**Des calculs explicites** Dans cette section, la micro-structure dans la figure 4.1 est reprise pour un exemple de calcul. On voit les trois premiers cas avec le choix successif des coefficients  $D_{111} = 1, D_{122} = 1, D_{212} = 1$ . Avec ce cas, nous avons les coefficients comme dans le tableau suivant :

$D_{ijk}$	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$D_{112} = 1$	$1,27 \times 10^{-1}$	$-9,12 \times 10^{-2}$	$-7,65 \times 10^{-2}$
$D_{211} = 1$	$1,09 \times 10^{-2}$	$5,27 \times 10^{-2}$	$-3,07 \times 10^{-2}$
$D_{222} = 1$	$1,72 \times 10^{-2}$	$-4,82 \times 10^{-2}$	$4,13 \times 10^{-3}$

Les autres valeurs de  $K_{ijk}$  sont :  $K_4 = K_5 = K_6 = 0$ .

La même situation se produit avec les trois derniers cas :

$D_{ijk}$	$K_6$	$K_5$	$K_4$
$D_{221} = 1$	$1,27 \times 10^{-1}$	$-9,12 \times 10^{-2}$	$-7,65 \times 10^{-2}$
$D_{122} = 1$	$1,09 \times 10^{-2}$	$5,27 \times 10^{-2}$	$-3,07 \times 10^{-2}$
$D_{111} = 1$	$1,72 \times 10^{-2}$	$-4,82 \times 10^{-2}$	$4,13 \times 10^{-3}$

Les autres valeurs de  $K_{ijk}$  sont :  $K_1 = K_2 = K_3 = 0$ . Nous avons ainsi un système d'équations linéaires :

$$\begin{pmatrix} E^a \\ E^b \\ E^c \\ E^d \\ E^e \\ E^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1^2(a) & K_2^2(a) & K_3^2(a) & K_1(a)K_2(a) & K_2(a)K_3(a) & K_1(a)K_3(a) \\ K_1^2(b) & K_2^2(b) & K_3^2(b) & K_1(b)K_2(b) & K_2(b)K_3(b) & K_1(b)K_3(b) \\ K_1^2(c) & K_2^2(c) & K_3^2(c) & K_1(c)K_2(c) & K_2(c)K_3(c) & K_1(c)K_3(c) \\ K_6^2(d) & K_5^2(d) & K_4^2(d) & K_6(d)K_5(d) & K_5(d)K_4(d) & K_6(d)K_4(d) \\ K_6^2(e) & K_5^2(e) & K_4^2(e) & K_6(e)K_5(e) & K_5(e)K_4(e) & K_6(e)K_4(e) \\ K_6^2(f) & K_5^2(f) & K_4^2(f) & K_6(f)K_5(f) & K_5(f)K_4(f) & K_6(f)K_4(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ A_{12} \\ A_{23} \\ A_{13} \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

Les valeurs de  $K_{ijk}$  dépendent linéairement des coefficients  $D_{ijk}$  donc, nous pouvons trouver la matrice des coefficients du système (matrice avec des valeurs de  $K_{ijk}$ ) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

**Contrôle du tenseur des courbures** Pour obtenir la forme souhaitée, nous proposons de résoudre parallèlement deux systèmes d'équations :

$$\begin{aligned} K_1(a)\alpha + K_1(b)\beta + K_1(c)\gamma &= 1 \\ K_2(a)\alpha + K_2(b)\beta + K_2(c)\gamma &= 0 \\ K_3(a)\alpha + K_3(b)\beta + K_3(c)\gamma &= 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} K_1(a)\alpha + K_1(b)\beta + K_1(c)\gamma &= 0 \\ K_2(a)\alpha + K_2(b)\beta + K_2(c)\gamma &= 1 \\ K_3(a)\alpha + K_3(b)\beta + K_3(c)\gamma &= 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} K_1(a)\alpha + K_1(b)\beta + K_1(c)\gamma &= 0 \\ K_2(a)\alpha + K_2(b)\beta + K_2(c)\gamma &= 0 \\ K_3(a)\alpha + K_3(b)\beta + K_3(c)\gamma &= 1 \end{aligned} \quad (4.66)$$

pour contrôler que deux composantes du triplet  $(K_1, K_2, K_3)$  sont nulles tandis que la troisième ne l'est pas ; et

$$\begin{aligned} K_6(a)\alpha' + K_6(b)\beta' + K_6(c)\gamma' &= 1 \\ K_5(a)\alpha' + K_5(b)\beta' + K_5(c)\gamma' &= 1 \\ K_4(a)\alpha' + K_4(b)\beta' + K_4(c)\gamma' &= 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} K_6(a)\alpha' + K_6(b)\beta' + K_6(c)\gamma' &= 1 \\ K_5(a)\alpha' + K_5(b)\beta' + K_5(c)\gamma' &= 0 \\ K_4(a)\alpha' + K_4(b)\beta' + K_4(c)\gamma' &= 1 \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} K_6(a)\alpha' + K_6(b)\beta' + K_6(c)\gamma' &= 0 \\ K_5(a)\alpha' + K_5(b)\beta' + K_5(c)\gamma' &= 1 \\ K_4(a)\alpha' + K_4(b)\beta' + K_4(c)\gamma' &= 1 \end{aligned} \quad (4.69)$$

pour contrôler que deux composantes du triplet  $(K_4, K_5, K_6)$  sont nulles tandis que la troisième ne l'est pas.

**Calculs** Pour trouver la première ligne de la matrice (4.63), nous résolvons donc (4.64) et obtenons le triplet :  $(\alpha = 6596, \beta = 3913, \gamma = -1226)$ . Nous relançons le calcul avec la combinaison  $D_{111} = \alpha, D_{122} = \beta, D_{212} = \gamma$  et nous trouvons que  $K_1 = 1, K_2 = K_3 = 0$  ainsi que  $A_{11} = \frac{E^{combi.}}{K_1^2} = A_{111111} = 1.14 \times 10^7$

Identiquement, nous avons deux autres triplets de  $(\alpha, \beta, \gamma)$  pour les deux lignes suivantes :

$$\begin{aligned} (\alpha = 2632, \beta = 1578, \gamma = -491) &\implies K_2 = 1, K_1 = K_3 = 0 \\ &\implies A_{22} = 1.47 \times 10^6 \\ (\alpha = 5859, \beta = 3487, \gamma = -1082) &\implies K_3 = 1, K_1 = K_2 = 0 \\ &\implies A_{33} = 6,86 \times 10^6 \end{aligned} \quad (4.70)$$

C'est facile maintenant de calculer les trois coefficients restants :  $A_{12}, A_{23}, A_{13}$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E^d \\ E^e \\ E^f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ A_{12} \\ A_{23} \\ A_{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{23} \\ A_{13} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{23} \\ A_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} E^d \\ E^e \\ E^f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \end{pmatrix} \right] \quad (4.72)$$

Après les calculs, nous trouvons que :

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{23} \\ A_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8650449 \\ -2645006 \\ 1,17 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

#### 4.6.3 Calcul des modules effectifs du milieu de substitution de Cosserat

Dans cette section, on va identifier les modules effectifs du milieu de Cosserat orthotrope homogène équivalent. Le matériau micro-hétérogène est celui de la figure 4.1. La forme matricielle du tenseur des modules de rigidité du milieu de Cosserat orthotrope a déjà été établie dans (Forest and Sab, 1998b) :

$$\begin{bmatrix} y_{1111} & y_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{1122} & y_{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{1212} & y_{1221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{1221} & y_{2121} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3232} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Dans cette section, la cellule centrale considérée est cubique symétrique, donc le tenseur des modules est légèrement différent de 4.73 :

$$\begin{bmatrix} y_{1111} & y_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{1122} & y_{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{1212} & y_{1221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{1221} & y_{2121} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3131} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Le tenseur de déformation du milieu de Cosserat s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ k_{31} \\ k_{32} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

et donc,  $\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  est calculée suivant la formule :

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{22} & e_{12} & e_{21} & \kappa_1 & \kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1111} & y_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{1122} & y_{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{1212} & y_{1221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{1221} & y_{2121} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3131} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

On transforme la forme matricielle de l'énergie en un système d'équation linéaire comme dans la table 4.3. Avec ce système, tous les modules de rigidité du milieu substitutif de Cosserat sont trouvés.



Inconnues	$y_{1111}$	$y_{1122}$	$y_{1212}$	$y_{1221}$	$y_{2121}$	$c_{3131}$	Côté droit
Coefficients	$e_{11}^2 + e_{22}^2$	$2e_{11}e_{22}$	$e_{12}^2$	$2e_{12}e_{21}$	$e_{21}^2$	$\kappa_1^2 + \kappa_2^2$	$2 \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$
Cas 1	1.	0.	0.	0.	0.	0.	$2E^1$
Cas 2	2.	2.	0.	0.	0.	0.	$2E^2$
Cas 3	0.	0.	1.	0.	0.	0.	$2E^3$
Cas 4	0.	0.	2.	2.	0.	0.	$2E^4$
Cas 5	0.	0.	0.	0.	1.	0.	$2E^5$
Cas 6	0.	0.	0.	0.	0.	1.	$2E^6$

TAB. 4.3 – Les cas de chargement pour établir un système d'équations linéaires.

## 4.7 Quelques remarques et perspectives

L'approche par les milieux généralisés devient efficace quand l'hypothèse de la séparation d'échelles entre les niveaux macro et micro est en train de disparaître. Si cette condition n'est plus valide, i.e si la longueur d'onde de variation des champs macroscopiques de contraintes et de déformation devient égale ou plus petite que la taille de l'hétérogénéité matérielle, le seul choix possible est d'abandonner l'homogénéisation et de réaliser les calculs de matériau en incluant toutes les hétérogénéités pertinentes.

Dans ce chapitre, on a proposé une analyse critique des tentatives actuelles pour construire un milieu généralisé homogène équivalent remplaçant un matériau composite de Cauchy. L'introduction des conditions aux limites non-homogènes, en particulier polynômiales, à la cellule élémentaire composite, a été discutée comme une extension heuristique du schéma d'homogénéisation classique. L'objectif est de lier les coefficients de tels polynômes aux mesures généralisées de déformation du MHGE macroscopique. Un milieu généralisé très général a été considéré au niveau macro, intitulé le milieu micromorphe, parce qu'il prend en compte simultanément les effets de rotation du milieu de Cosserat et aussi des mécanismes de déformation pure qui sont très importants par exemple pour matériaux poreux. Les définitions explicites des degrés de liberté macroscopiques et de leur gradient ont été avancées. Les relations entre le polynôme d'ordre 2 à d'ordre 4 et la micro-déformation et son gradient ont été établies. Elles impliquent la contribution essentielle du champ de fluctuation.

Une stratégie numérique a été illustrée dans le cas du composite élastique simple afin de déterminer ce champ de fluctuation. Elle consiste à appliquer des conditions aux limites quadratiques et cubiques aux bords du volume de plus en plus large de composite, i.e contenant un nombre croissant de cellules élémentaires, jusqu'à ce qu'un champ stable de déformation-contraintes s'établisse dans la cellule élémentaire centrale loin de la bordure extérieure. C'est la définition proposée de la taille de VER pour les conditions aux limites polynômiales. En cas d'élasticité linéaire, le principe de superposition peut être utilisé pour imposer le gradient souhaité de micro-déformation à la cellule élémentaire centrale. Les approches précédemment proposées dans la littérature, qui se basent essentiellement sur des fluctuations soit nulles soit périodiques, sont inexactes dans l'application des conditions aux limites bien adaptées et dans la détermination de quantités de contraintes et de déformation généralisées. Par conséquent, les conditions aux limites qui peuvent être appliquées aux bords d'une seule cellule élémentaire, afin de provoquer le champ de déplacement sans considérer des grands assemblages de cellules, ne sont pas encore connues. La méthode  $FE^2$  n'est donc pas possible avec la méthode proposée.

La question de la validation de l'approche proposée au moyen de comparaisons entre une

référence et des calculs d'homogénéisation n'est pas discutée dans ce chapitre mais fera l'objet du chapitre suivant. De telles comparaisons existent dans la littérature (Forest, 1998; Forest and Sab, 1998a; Kruch and Forest, 1998; Feyel, 2003; Jänicke and Diebels, 2009; De Bellis and Addessi, 2010). Les auteurs montrent aussi les limitations de l'approche car elle peut échouer pour certaines conditions de chargement qui ne sont pas prises en compte en choisissant les polynômes. C'est une situation qui est rencontrée aussi dans le développement des modèles améliorés de poutres et de plaques.

Plusieurs questions restent ouvertes pour que le schéma proposé représente une extension complète de la procédure d'homogénéisation classique. En particulier, seules les conditions de déplacement sont considérées, les conditions aux limites en contraintes ne sont pas encore mentionnées. La raison en fait est la difficulté d'élaborer des conditions de contraintes non-homogènes qui vérifient les exigences de bilan de quantité de mouvement et de moment cinétique sur la cellule élémentaire. Dans ce chapitre, nous avons illustré les conditions aux limites quadratiques de déplacement dans l'exemple numérique et le travail de détermination des modules correspondants. Ce travail reste à étendre aux polynômes de troisième et quatrième degrés pour contrôler la micro-déformation et la partie non symétrique du gradient de micro-déformation. C'est indispensable pour construire le milieu micromorphe de substitution complet. Ici nous avons mis en avant seulement les parties Cosserat et second gradient de ce milieu.

Ensuite, une question essentielle dans les méthodes d'homogénéisation étendues est l'établissement des conditions aux limites d'ordre supérieur prescrites au niveau macro, pour la micro-déformation et les doubles forces associées, à partir des conditions classiques sur le milieu hétérogène de référence. C'est un problème délicat déjà dans le cas classique (Haboussi et al., 2001; Kruch, 2007). Une question similaire se pose pour les conditions aux limites dans le cas de poutre et plaque composite, qui sont souvent prises d'une façon intuitive.

Quand le champ de fluctuation est pris en compte de la manière exacte proposée dans ce chapitre, la procédure d'identification proposée précédemment a été reconsidérée dans ce chapitre. Par exemple, l'équivalence d'énergie de déformation suivante a été considérée pour construire le milieu élastique de second gradient :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{V(0)} = \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \langle \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{x} \rangle : \boldsymbol{\underline{\underline{D}}} + \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\underline{\underline{v}}} \otimes \boldsymbol{\nabla}_x \rangle_{V(0)} = \boldsymbol{\underline{\underline{E}}} : \boldsymbol{\underline{\underline{C}}}^{eff} : \boldsymbol{\underline{\underline{E}}} + \boldsymbol{\underline{\underline{K}}} : \boldsymbol{\underline{\underline{A}}}^{eff} : \boldsymbol{\underline{\underline{K}}} \quad (4.77)$$

où les propriétés effectives du second gradient sont les tenseurs  $\boldsymbol{\underline{\underline{C}}}^{eff}$  et  $\boldsymbol{\underline{\underline{A}}}^{eff}$  des modules élastiques à identifier à partir de plusieurs conditions de chargement. En général, le matériau est anisotrope. Les classes de symétrie élastique et leurs modules indépendants correspondants ont été déterminés récemment pour les tenseurs d'ordre 6 dans (Auffray et al., 2009; Auffray et al., 2010).

L'avantage principal de l'approche polynômiale proposée en comparaison à la méthode asymptotique rigoureuse est en fait que cette technique est applicable facilement si les matériaux de la cellule élémentaire ont un comportement non-linéaire. Une première illustration a été donnée dans la section 4.3.3. Plus généralement, l'approche peut servir à identifier les paramètres effectifs de matériau intervenant dans les lois de comportement non linéaires pour les milieux micromorphes. De telles lois ont été développées pour l'élasto-visco-plasticité dans les références (Forest and Sievert, 2003; Dillard et al., 2006; Grammenoudis and Tsakmakis, 2009; Grammenoudis et al., 2009; Regueiro, 2010; Sansour et al., 2010) et peuvent être identifiées par moyen de la méthode d'homogénéisation généralisée.

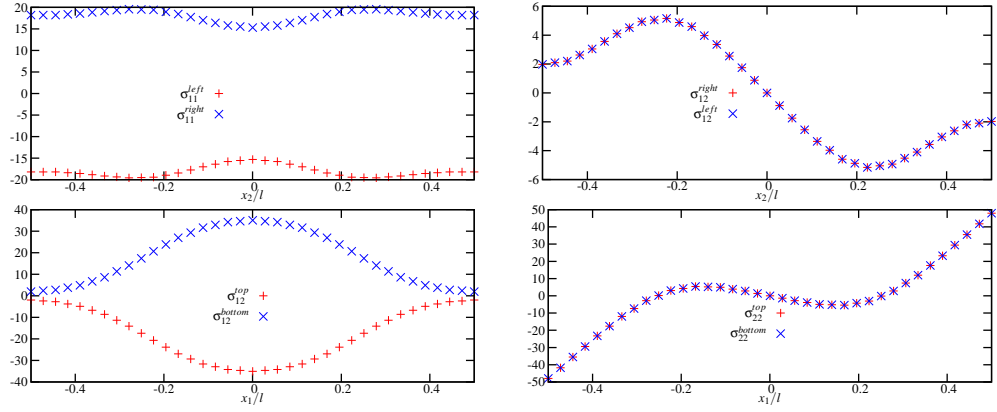


FIG. 4.10 – Composantes de contraintes contribuant au vecteur-contrainte aux bords de la cellule élémentaire centrale pour le chargement quadratique au bord de l'assemblage de cellules avec  $D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$ .

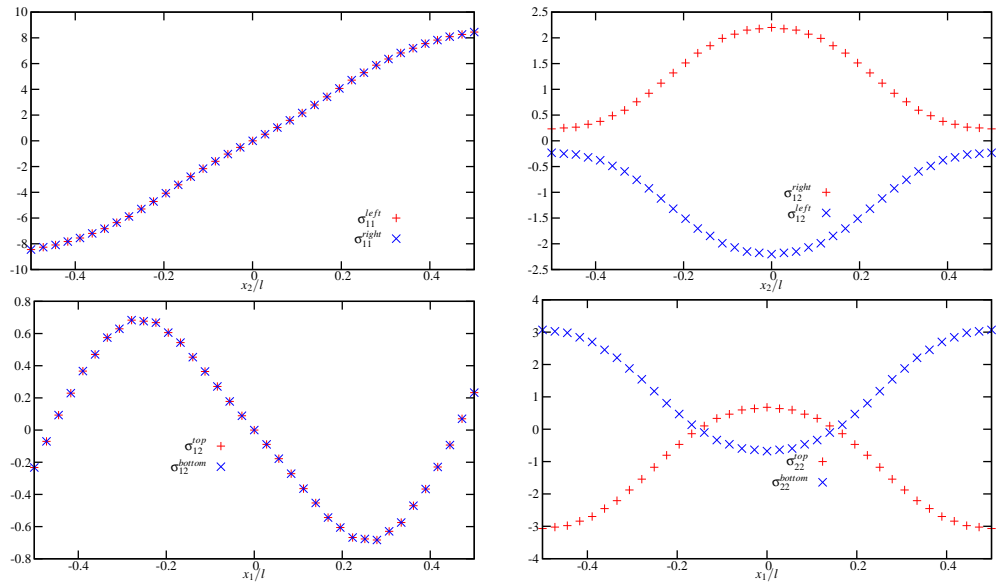


FIG. 4.11 – Composantes de contraintes contribuant au vecteur-contrainte aux bords de la cellule élémentaire centrale pour le chargement quadratique lointain appliqué au bord de l'assemblage de cellules avec  $D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$ .

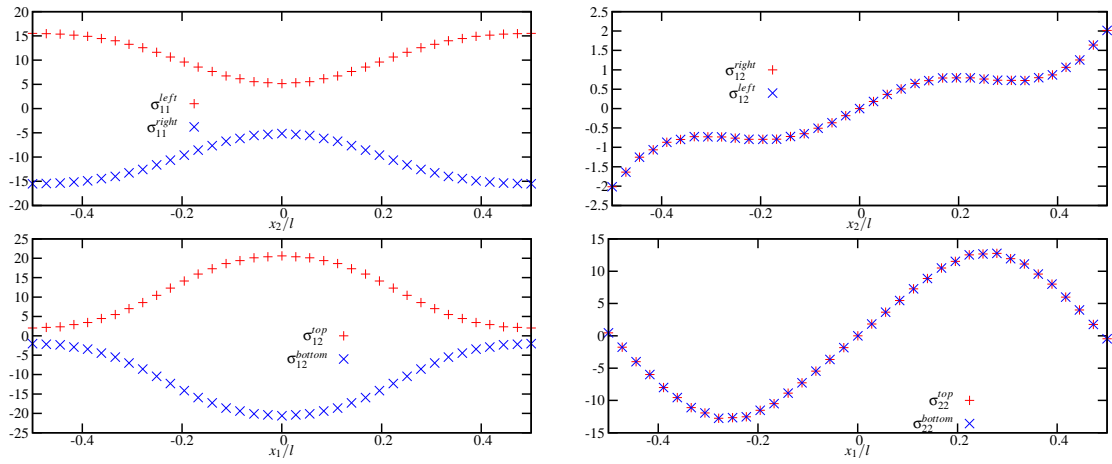


FIG. 4.12 – Composantes de contraintes contribuant au vecteur-contrainte aux bords de la cellule élémentaire centrale pour le chargement quadratique appliqué au bord de l'assemblage de cellules avec  $D_{122} = 1 \text{ mm}^{-1}$ .

# Chapitre 5

## Validation

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>98</b>
<b>5.2</b>	<b>Définition de milieu généralisé effectif</b>	<b>100</b>
5.2.1	Milieu global micromorphe	100
5.2.2	Le milieu du second gradient	101
5.2.3	Milieu global de Cosserat	102
<b>5.3</b>	<b>Condition polynômiale de chargement du VER</b>	<b>103</b>
5.3.1	Sélection des coefficients du polynôme	103
5.3.2	Rôle du champ de fluctuation	103
5.3.3	Existence du VER pour les conditions polynômiales aux limites	105
<b>5.4</b>	<b>Identification des modules élastiques effectifs généralisés</b>	<b>105</b>
5.4.1	Définition du matériau composite considéré	105
5.4.2	Identification des modules élastiques classiques	107
5.4.3	Identification des modules d'élasticité effectifs de Cosserat	107
5.4.4	La taille du VER pour les propriétés du milieu global de Cosserat et du second gradient	111
5.4.5	Identification des modules effectifs du modèle du second gradient élastique	115
5.4.6	Identification des modules élastiques effectifs micromorphes	117
<b>5.5</b>	<b>Validation de la méthode d'homogénéisation d'ordre supérieur</b>	<b>118</b>
5.5.1	Calcul de structure de référence et mise en défaut de l'approche de Cauchy	120
5.5.2	Calcul avec trois milieux généralisés homogènes substitutifs différents	120
<b>5.6</b>	<b>Validation et relocalisation dans le cas d'autres conditions de chargement d'une structure composite</b>	<b>124</b>
5.6.1	Cas analytique et cas d'un chargement combiné	124
5.6.2	Deux calculs de référence	126
5.6.3	Comparaison des prédictions de Cauchy, de Cosserat et second-gradient	126
5.6.4	Relocalisation des déformations	127

---

## 5.1 Introduction

La méthode d'homogénéisation classique ne fonctionne pas pour les matériaux composites dont la taille des constituants n'est pas suffisamment petite par rapport à celle de la structure ou à la longueur caractéristique de variation des champs mécaniques macroscopiques. Une nouvelle procédure d'homogénéisation a été proposée afin de surmonter cette limitation en se basant sur les correcteurs venant de la méthode des développements asymptotiques multi-échelles dans (Boutin, 1996b), ou sur l'extension polynômiale du champ microscopique dans (Gologanu et al., 1997; Forest, 1998; Ostoja-Starzewski et al., 1999b), introduite dans les chapitre précédents. La méthode des développements asymptotiques multi-échelles a le mérite d'offrir une méthode systématique dans le but de calculer les nouveaux correcteurs. Cependant malgré ces efforts il n'y a pas de certitude théorique quant à l'usage de ces correcteurs, en particulier pour savoir s'ils améliorent considérablement la prédiction. Cela est en particulier dû au fait que les effets de bords de la structure jouent un rôle significatif dans le comportement de la structure contenant une distribution périodique d'hétérogénéités de taille non-négligable. Or les méthodes d'homogénéisation peinent à fournir des conditions aux limites pertinentes dans ces conditions. En outre, il est difficile d'étendre cette méthode au comportement non-linéaire des matériaux à cause de la complexité de l'analyse asymptotique incrémentale. Par contre, l'usage des conditions polynômiales aux bords d'un volume élémentaire représentatif (VER) afin de déterminer les propriétés effectives d'ordre supérieur est applicable au matériau à comportement non-linéaire comme évoqué au chapitre précédent et dans (Forest, 1999; Geers et al., 2001; Feyel, 2003; Trovalusci and Masiani, 2003; Kouznetsova et al., 2004c). Pourtant, l'approche en développements polynômiaux à l'homogénéisation d'ordre supérieur reste encore à découvrir et il n'y a pas encore de procédure qui réponde totalement au problème, comme nous l'avons indiqué dans le précédent chapitre (Forest and Trinh, 2011).

D'abord, l'approche polynômiale se base sur le choix de la théorie du milieu généralisé bien adapté à l'échelle macro, comme un milieu homogène de substitution de milieu hétérogène. La méthode asymptotique multi-échelles conduit en général à la définition d'un modèle global du second gradient (Triantafyllidis and Bardenhagen, 1996). Ce dernier a été utilisé également dans la méthode polynômiale par (Kouznetsova et al., 2004c; Mühlisch et al., 2009; Kaczmarczyk et al., 2008; Bacigalupo and Gambarotta, 2010). Cependant, le milieu homogène substitutif peut inclure aussi des degrés de liberté supplémentaires comme des micro-rotations dans le modèle de Cosserat ou des micro-déformation complète selon le modèle micromorphe. C'est l'équivalent 3D du choix de modèle de poutre Bernoulli et Timoshenko pour les poutres composites. Il faut définir ces quantités cinématiques macroscopiques supplémentaires comme une moyenne bien adaptée sur le VER de matériau hétérogène. Le modèle de Cosserat et son cas particulier, le modèle à couples de contraintes ont été utilisés comme milieux homogènes substitutifs pour plusieurs matériaux composites par (Masiani and Trovalusci, 1996; Forest and Sab, 1998a; Trovalusci and Masiani, 2003; Larsson and Diebels, 2007; Bigoni and Drugan, 2007; De Bellis and Addessi, 2010). En particulier, les mousses ou les structures de treillis ont été modélisées par un tel modèle de Cosserat ou micromorphe (Ebinger et al., 2005; Dillard et al., 2006; Tekoglu and Onck, 2008). Il n'y a néanmoins aucune règle systématique permettant une sélection de la théorie la mieux adapté du continuum généralisé, à l'échelle macroscopique. Le modèle micromorphe, avancé dans (Jänicke et al., 2009), a l'avantage d'englober l'approche de Cosserat ainsi que celle du second gradient comme cas limites avec des propriétés spécifiques.

Ensuite, les différentes manières d'appliquer les conditions aux limites polynômiales non-homogènes au VER ont été examinées dans la littérature et dans les deux chapitres précédents, comme extension de la condition affine qui est habituelle dans l'homogénéisation classique. La

condition polynômiale quadratique ou d'ordre supérieur est appliquée directement aux bords du VER, comme dans (Gologanu et al., 1997; Jänicke et al., 2009). Mais dans ce cas, lors de la considération des conditions quadratiques, par exemple, on a vu que la moyenne du second gradient n'a pas pu être strictement contrôlée (Forest and Trinh, 2011). De plus, il est notoire que les conditions de Dirichlet mènent à des modules globaux trop raides. L'introduction d'un champ de fluctuation de déplacement est ainsi nécessaire. Ce dernier est choisi périodique dans (Forest and Sab, 1998a; Kouznetsova et al., 2004c), comme dans l'homogénéisation classique des composites périodiques. Ce choix toutefois n'est pas entièrement satisfaisant, comme nous l'avons discuté dans le chapitre précédent et dans (Yuan et al., 2008; Kaczmarczyk et al., 2008; Bacigalupo and Gambarotta, 2010; Forest and Trinh, 2011) où des conditions alternatives du champ de fluctuation sont proposées.

Finalemet, la méthode d'homogénéisation se base sur la définition d'un VER pour le matériau composite. Cette définition du VER dans l'homogénéisation d'ordre supérieur s'avère être une tâche difficile, contrairement à l'homogénéisation classique, pour laquelle une procédure claire existe pour les deux types de matériaux hétérogènes : périodiques et aléatoires (Kanit et al., 2003). De plus, la question de la taille du VER destinée à la détermination du milieu généralisé doit être examinée avec une grande attention. Il est exposé par (Kouznetsova et al., 2004c) que les modules effectifs du second gradient sont en loi de puissance de la taille du VER i.e. le nombre des cellules élémentaires dans le VER. Au contraire, il semble qu'une procédure d'homogénéisation satisfaisante doive produire des modules effectifs qui ne dépendent pas de la taille du VER dès que le VER est atteint, i.e la taille de cellule élémentaire pour un milieu périodique. Une telle procédure a été proposée dans le chapitre précédent et dans (Forest and Trinh, 2011) et sera utilisée dans cette contribution. De même, les propriétés effectives d'ordre supérieur ne devraient pas dépendre pas du choix spécifique du motif de la cellule élémentaire pour le milieu périodique, de façon similaire à l'homogénéisation classique. Cette propriété requise n'est pas satisfaite par les techniques d'homogénéisation d'ordre supérieur disponibles.

Le présent chapitre aborde quelques questions encore non résolues concernant le problème de l'homogénéisation à l'aide de milieux continus généralisés. L'objectif est de comparer les valeurs et les performances des propriétés élastiques d'ordre supérieur globales, qui proviennent de plusieurs techniques abordés dans le chapitre précédent pour l'homogénéisation d'ordre supérieur. Il est réalisé dans le cas particulier d'un matériau périodique à deux phases élastiques fortement contrastées avec une géométrie donnée du VER. Les modules globaux du milieu substitutif de Cosserat, du second gradient et micromorphe seront déterminés pour différentes façons d'évaluer le champ de fluctuation de déplacement. La performance des milieux substitutifs obtenus est évaluée, en considérant un problème aux limites sur une structure hétérogène, pour lequel la méthode d'homogénéisation classique ne donne pas un résultat satisfaisant.

Certains règles disponibles de transition d'échelle micro-macro pour les milieux d'ordre supérieur sont rappelées dans la sous-section 5.2. Les conditions polynômiales aux limites sont rappelées dans la sous-section 5.3 où la question de la taille du VER dans l'homogénéisation d'ordre supérieur est aussi abordée. Les propriétés globales élastiques d'ordre supérieur sont identifiées dans la sous-section 5.4 pour trois conditions de fluctuation différentes dans le cas d'une microstructure composite donnée. Dans la dernière sous-section, un calcul de référence est effectué sur la structure hétérogène entièrement discrétisée avec un chargement particulier. Cette référence est comparée à l'estimation du milieu global substitutif de Cosserat, du second gradient et micromorphe.

L'analyse est limitée à l'élasticité linéaire dans le cadre de l'hypothèse de petites déformations. Tous les états déformés présentés dans les figures sont amplifiés pour une meilleure illustration.

Ce chapitre fait l'objet de la publication à paraître (Trinh et al., 2011).

## 5.2 Définition de milieu généralisé effectif

La procédure d'homogénéisation étendue, se basant sur l'usage de conditions aux limites non-homogène polynômiales sur la cellule élémentaire du matériau hétérogène, se base généralement sur le choix *à priori* du milieu généralisé ciblé. Le nombre des coefficients indépendants dans le polynôme considéré doit augmenter si la cinématique du milieu global généralisé est enrichie. La situation la plus générale à l'échelle macroscopique considérée dans la littérature est le milieu micromorphe. Nous faisons d'abord un rappel de la procédure d'homogénéisation pour le milieu global micromorphe suivant (Forest, 2002; Jänicke et al., 2009). Nous montrerons ensuite comment cette situation générale se réduit au milieu global de Cosserat et du second gradient comme des cas particuliers, qui ont été proposés indépendamment dans (Gologanu et al., 1997; Forest and Sab, 1998a).

### 5.2.1 Milieu global micromorphe

On rappelle que la théorie micromorphe introduit les degrés de liberté de microdéformation représentés par le tenseur du second ordre généralement non-symétrique,  $\chi(\underline{\mathbf{X}})$ . Ces nouveaux degrés de liberté sont ajoutés à ceux classiques de déplacement,  $\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}})$ . On suppose que le développement du gradient de microdéformation :

$$\underline{\tilde{\mathbf{K}}}(\underline{\mathbf{X}}) := \underline{\tilde{\chi}}(\underline{\mathbf{X}}) \otimes \nabla_{\mathbf{X}} \quad (5.1)$$

est associé avec un travail interne et à un stockage d'énergie. Il y a également un prix énergétique, caractérisé par la mesure de déformation relative

$$\underline{\mathbf{e}}(\underline{\mathbf{X}}) := \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}) \otimes \nabla_{\mathbf{X}} - \underline{\tilde{\chi}}(\underline{\mathbf{X}}) \quad (5.2)$$

à payer pour que la microdéformation diffère de la macrodéformation. La substitution d'un matériau de Cauchy hétérogène par un milieu homogène micromorphe exige la définition des degrés de liberté supplémentaires comme fonctions des micro-champs. Pour un champ local de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}})$  dans le volume élémentaire  $V$ , il a été proposé dans le chapitre précédent et dans (Forest and Sab, 1998a; Forest, 2002; Jänicke et al., 2009; Jänicke and Diebels, 2009; Forest and Trinh, 2011) de déterminer le champ homogène de déformation, qui est le plus proche du champ de déplacement réel, dans le sens du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}), \underline{\tilde{\chi}}(\underline{\mathbf{X}})} \int_V \left\| \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}) - \underline{\tilde{\chi}}(\underline{\mathbf{X}}) \cdot (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \right\|^2 dV \quad (5.3)$$

pour un point matériel donné  $\underline{\mathbf{X}}$ . La procédure de minimisation est simple et délivre, en prenant  $\underline{\mathbf{X}}$  comme le centre de  $V(\underline{\mathbf{X}})$  :

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}) = \langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \rangle_V, \quad \underline{\tilde{\mathbf{A}}} = \langle (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \otimes (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \rangle_V \quad (5.4)$$

$$\underline{\tilde{\chi}}(\underline{\mathbf{X}}) = \langle (\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}})) \otimes (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \rangle_V \cdot \underline{\tilde{\mathbf{A}}}^{-1} = \langle \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) \otimes (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \rangle_V \cdot \underline{\tilde{\mathbf{A}}}^{-1} \quad (5.5)$$

où le moment quadratique est introduit et supposé être uniforme macroscopiquement dans la suite. La définition du milieu global exige ensuite l'évaluation des gradients macroscopiques des ddls. Le gradient macroscopique du champ de déplacement est encore exprimé par la



moyenne (5.11). Le gradient de la microdéformation (5.1) est calculé en utilisant la définition (5.5) comme dans le chapitre précédent et (Forest and Trinh, 2011) :

$$\underline{\underline{K}}^T(\underline{\underline{X}}) = \langle (\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}) \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x) \otimes (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{X}}) \rangle \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}, \quad K_{ijk} = \langle u_{i,k}(x_l - X_l) \rangle A_{lj}^{-1} \quad (5.6)$$

où la transposition du tenseur de troisième ordre est appliquée aux deux derniers indices. Par conséquent, le gradient de microdéformation peut être interprété comme le premier moment de la distribution du gradient de déplacement local. La déformation relative doit également être évaluée et prend la forme de la différence :

$$\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{X}}) = \langle \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}) \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x \rangle_V - \langle \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}) \otimes (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{X}}) \rangle_V \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \quad (5.7)$$

Lorsque le champ de déplacement  $\underline{\underline{u}}$  est une transformation linéaire, incluant un mouvement du corps rigide et le gradient de déformation s'annule comme il le faut.

Le milieu global micromorphe est caractérisé par la forme de la densité de travail des forces internes, qui implique trois tenseurs de contrainte, conjugués aux trois mesures de déformation :

$$p^{(i)}(\underline{\underline{U}}, \underline{\underline{\chi}}) := \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}_X + \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\chi}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}_X = \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle \quad (5.8)$$

Le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}$  est pris symétrique, alors que le tenseur des contraintes relatives  $\underline{\underline{S}}$  est généralement non symétrique. Le tenseur des doubles contraintes  $\underline{\underline{M}}$  ne présente en général aucune propriété de symétrie par rapport à ses trois indices.

### 5.2.2 Le milieu du second gradient

Le modèle du second gradient se base sur l'introduction du premier et du second gradients du champ de déplacement,  $\underline{\underline{U}}(\underline{\underline{X}})$ . En particulier, la densité de travail des efforts intérieurs prend la forme :

$$p^{(i)}(\underline{\underline{U}}) := \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}_X + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}_X \otimes \underline{\underline{\nabla}}_X \quad (5.9)$$

où  $\underline{\underline{\Sigma}}$  est le tenseur symétrique des contraintes simples et  $\underline{\underline{M}}$  est tenseur des contraintes doubles ou hyper-contraintes, qui est symétrique par rapport à ses deux derniers indices. Le tenseur des contraintes remplit les conditions d'équilibre :

$$\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}_X = 0, \quad \text{with} \quad \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}_X \quad (5.10)$$

en l'absence des forces volumiques ni accélération. Les lois de comportement relient le premier et second gradients de déplacement aux deux tenseurs de contraintes. Elles ont été présentées dans les chapitre précédents.

Au niveau macro, le déplacement, la déformation et le gradient de déformation sont les valeurs moyennes des quantités correspondantes au niveau local partout dans le VER  $V$  qui se compose d'un matériau de Cauchy hétérogène (Forest and Trinh, 2011) :

$$\underline{\underline{U}}(\underline{\underline{X}}) = \langle \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}) \rangle_V, \quad \underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}_X = \langle \underline{\underline{u}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x \rangle_V \quad (5.11)$$

$$\underline{\underline{K}} := \underline{\underline{U}} \otimes \underline{\underline{\nabla}}_X \otimes \underline{\underline{\nabla}}_X = \langle \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}) \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x \otimes \underline{\underline{\nabla}}_x \rangle_V \quad (5.12)$$

Les mesures de déformation  $\underline{\underline{K}}$  dans ce modèle du second gradient sont symétriques par rapport aux deux derniers indices. C'est la différence principale avec les mesures de déformation du modèle micromorphe. L'identification des propriétés du milieu substitutif du

second gradient se réalise à travers l'identification de la densité de macro-énergie et l'énergie moyenne sur  $V$  :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V = \boldsymbol{\Sigma}(\underline{\mathbf{X}}) : \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{X}}) + \underline{\mathbf{M}}(\underline{\mathbf{X}}) : \underline{\mathbf{K}}(\underline{\mathbf{X}}) \quad (5.13)$$

Le modèle micromorphe se réduit à la théorie du gradient de déformation si la liaison interne

$$\underline{\boldsymbol{\chi}} \equiv \underline{\mathbf{U}} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} \iff \underline{\mathbf{e}} \equiv 0 \quad (5.14)$$

est imposée (Forest, 2009).

### 5.2.3 Milieu global de Cosserat

Le modèle de Cosserat est un cas spécial de la théorie micromorphe, pour lequel la microdéformation se réduit à une microrotation pure. Cela amène à limiter la minimisation (5.3) à  $\underline{\boldsymbol{\chi}}$  anti-symétrique ou d'une façon équivalente à un vecteur axial  $\underline{\boldsymbol{\Phi}}$  proposé dans (Forest and Sab, 1998a) :

$$\min_{\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}), \underline{\boldsymbol{\Phi}}(\underline{\mathbf{X}})} \int_V \|\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}) - \underline{\boldsymbol{\Phi}}(\underline{\mathbf{X}}) \times (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}})\|^2 dV \quad (5.15)$$

où  $\times$  désigne le produit vectoriel. La même définition (5.4) est appliquée pour le déplacement macroscopique. Le vecteur de rotation de Cosserat macroscopique est la solution de

$$(\text{trace } \underline{\mathbf{A}}) \underline{\boldsymbol{\Phi}} + \int_V \underline{\boldsymbol{\Phi}} \cdot (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}})(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) dV = \int_V (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \times (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{U}}) dV \quad (5.16)$$

où le tenseur géométrique  $\underline{\mathbf{A}}$  a été introduit. Les tenseurs de déformation et de courbure de Cosserat sont donc définis comme :

$$\underline{\mathbf{e}} := \underline{\mathbf{U}} \otimes \nabla + \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \underline{\boldsymbol{\Phi}}, \quad \underline{\mathbf{K}} := \underline{\boldsymbol{\Phi}} \otimes \nabla \quad (5.17)$$

L'identification des propriétés du milieu substitutif de Cosserat se réalise à travers l'identification de la densité de macro-énergie et la moyenne d'énergie dans  $V$  :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V = \boldsymbol{\Sigma} : \underline{\mathbf{e}}^{sym} + \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{e}}^{skew} + \underline{\mathbf{M}} : \underline{\mathbf{K}} \quad (5.18)$$

où  $\boldsymbol{\Sigma}$  est le tenseur des contraintes symétrique,  $\underline{\mathbf{S}}$  est le tenseur des contraintes anti-symétrique, qui travaille successivement avec les parties symétrique et anti-symétrique de la déformation relative, et  $\underline{\mathbf{M}}$  est le tenseur des couples de contraintes.

Dans le cas 2D avec un VER carré dont la longueur des côtés est  $l$  et  $\underline{\mathbf{X}}$  au centre, on peut dériver à partir de (5.16) à la formule suivante

$$\underline{\boldsymbol{\Phi}} = \frac{6}{l^2} \langle (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \times (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{U}}) \rangle_V \quad (5.19)$$

qui est établie dans (Forest and Sab, 1998a) et sera utilisée dans cette contribution. Si le plan de déformation est  $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2)$ , donc  $\underline{\boldsymbol{\Phi}} = \Phi_3 \underline{\mathbf{e}}_3$ . Par suite, il n'existe plus que deux composantes du tenseur de courbure, nommément  $K_{31}, K_{32}$  :

$$K_{31} = \frac{6}{l^2} \langle x_1 u_{2,1} - x_2 u_{1,1} \rangle_V, \quad K_{32} = \frac{6}{l^2} \langle x_1 u_{2,2} - x_2 u_{1,2} \rangle_V \quad (5.20)$$

### 5.3 Condition polynômiale de chargement du VER

Les conditions polynômiales de chargement ont été largement utilisées récemment pour développer le schéma d'homogénéisation d'ordre supérieur. Plusieurs degrés du polynôme sont considérés, en fonction de la théorie du milieu global généralisé choisie. Dans la suite, trois cas sont évalués dans la section 5.5 et la discussion de l'existence du VER pour une telle condition aux limites, est évoquée.

#### 5.3.1 Sélection des coefficients du polynôme

Le déplacement local à l'intérieur du VER  $V$  du matériau hétérogène est étendue à la forme polynômiale

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{D} : (\underline{x} \otimes \underline{x}) + \frac{1}{3} \underline{D} : (\underline{x} \otimes \underline{x} \otimes \underline{x}) + \frac{1}{4} \underline{D} :: (\underline{x} \otimes \underline{x} \otimes \underline{x} \otimes \underline{x}) + \underline{v}(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in V \quad (5.21)$$

Les coefficients du polynôme sont constants et possèdent les propriétés de symétrie suivantes : les composantes  $D_{ijk}$ ,  $D_{ijkl}$  et  $D_{ijklm}$  sont successivement symétrique par rapport à leurs 2, 3 et 4 derniers indices. Un champ de fluctuation  $\underline{v}(\underline{x})$  doit être ajouté à un tel développement pour que le déplacement soit une solution du problème aux limites élémentaire. Un tel polynôme est utilisé pour déformer de façon non-homogène le volume élémentaire  $V$ , et ainsi explorer la réponse du matériau hétérogène aux différents modes de déformation non-homogène. La façon d'imposer une telle condition de chargement à un VER dépend du choix du champ de fluctuation  $\underline{v}$  autorisé sur le bord  $\partial V$  du VER. Quelques choix possibles sont discutés dans la section suivante, en écho des discussions des chapitres précédents.

Le degré du polynôme considéré dans le développement est lié directement à l'ordre de la théorie du milieu global généralisé :

- la contribution quadratique  $D_{ijk}$  est requise pour l'identification du milieu effectif du second gradient (Gologanu et al., 1997; Geers et al., 2001; Forest and Trinh, 2011). Certaines composantes des termes quadratiques correspondant aux modes de flexion sont suffisants à la construction d'un milieu effectif à couples de contraintes (Ostoja-Starzewski et al., 1999b; Bouyge et al., 2001a).
- Certaines composantes des termes quadratiques  $D_{ijk}$  et du terme de troisième ordre  $D_{ijkl}$  sont impliquées dans la construction du milieu global effectif de Cosserat (Forest and Sab, 1998a). La sélection des coefficients pertinents est réalisée en gardant seulement ceux qui contribuent à la microrotation et la courbure globale du VER comme définie successivement dans (5.19) et (5.20).
- Certaines composantes du polynôme du quatrième degré  $D_{ijklm}$  sont nécessaires à la construction du milieu Cosserat 3D (Forest, 2002) et du milieu global micromorphe (Jänicke et al., 2009). La sélection des coefficients sera discutée dans cette contribution.

#### 5.3.2 Rôle du champ de fluctuation

Imposer une courbure moyenne ou un gradient de déformation moyenne à un VER est effectué de plusieurs manières liées au choix de la fluctuation  $\underline{v}$  dans (5.21). Les procédures présentées dans la littérature ne sont pas encore satisfaisantes complètement comme l'évoque la discussion dans (Forest and Trinh, 2011) et dans le chapitre précédent. Trois possibilités principales ont été exploitées :

1.  $\underline{v}(\underline{x}) = 0, \forall \underline{x} \in \partial V$ . La fluctuation est fixée à zéro au bord de  $V$ . C'est une méthode simple qui fournit une estimation raisonnable des propriétés effectives du milieu substitutif généralisé. Pourtant, elle souffre de deux limitations. Premièrement,

il est impossible d'imposer strictement la moyenne du gradient de déformation car la déformation totale ne peut pas être prescrite au bord. On peut illustrer ce point via un cas simple où un seul coefficient  $D_{111}$  est considéré :

$$u_1 = \frac{1}{2}D_{111}x_1^2, \quad u_2 = 0, \quad \forall \underline{x} \in \partial V \quad (5.22)$$

On calcule la moyenne de la composante de second gradient

$$\langle u_{1,11} \rangle = \frac{1}{V} \int_V u_{1,11} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} u_{1,1} n_1 dS \quad (5.23)$$

Cette expression n'est pas exploitée plus loin car la composante de déformation  $\varepsilon_{11} = u_{1,1}$  n'est pas connue sur tout le bord  $\partial V$ , bien que  $u_1$  soit connu. La déformation ne peut pas être prescrite sur le bord dans le milieu de Cauchy. Au contraire, la formule (5.6) peut être utilisée et elle peut ainsi être écrite :

$$\begin{aligned} K_{111} &= \frac{12}{l^2 V} \int_V u_{1,1} x_1 dV = \frac{12}{l^2 V} \int_V (u_1 x_1)_{,1} dV - \frac{12}{l^2} \langle u_1 \rangle \\ &= \frac{12}{l^2 V} \int_{\partial V} u_1 x_1 n_1 dS - \frac{12}{l^2} \langle u_1 \rangle \\ &= \frac{12}{l^2 V} \int_{\partial V} \frac{1}{2} D_{111} x_1^3 n_1 dS - \frac{12}{l^2} \langle u_1 \rangle \\ &= \frac{12}{l^2 V} \frac{3}{2} D_{111} \int_V x_1^2 dV - \frac{12}{l^2} \langle u_1 \rangle \\ &= \frac{3}{2} D_{111} - \frac{12}{l^2} \langle u_1 \rangle \end{aligned} \quad (5.24)$$

Cette expression montre que  $K_{111}$  est effectivement relié au coefficient  $D_{111}$  mais la seconde contribution n'est pas connue a priori, elle est obtenue depuis un post-traitement de la solution numérique du problème aux limites sur le volume  $V$ .

Deuxièmement, comme dans l'homogénéisation classique (voir section 5.4.2), la prescription de la condition de Dirichlet aux bords du VER délivre en général des modules effectifs trop rigides.

2.  $\underline{v}(\underline{x})$  est périodique aux points homologues d'un VER. La restriction périodique a été imposée dans (Forest and Sab, 1998a; Kouznetsova et al., 2004c). Elle s'accompagne aussi de l'anti-périodicité du vecteur des contraintes sur les bords. Cette restriction permet la définition du tenseur global des contraintes, basée sur la condition de Hill-Mandel généralisée. Cependant, il n'y a pas de raison en général de supposer une telle exigence de périodicité en présence du chargement du gradient global de déformation, comme remarqué par (Yuan et al., 2008; Kaczmarczyk et al., 2008; Bacigalupo and Gambarotta, 2010).
3. Aucune restriction sur  $\underline{v}$ , comme obtenue aux bords de la cellule élémentaire si la condition polynômiale de Dirichlet est imposée sur le bord d'un matériau hétérogène périodique très loin de la cellule en considération, comme proposé dans (Forest and Trinh, 2011) et dans le chapitre précédent. Cette procédure est liée à la notion de VER pour les conditions polynômales discutée dans le chapitre précédent et la section suivante. La convergence en fonction de nombre de cellules considérées est confirmée dans un cas spécial où la fluctuation n'est pas périodique.

Ces différents choix seront utilisés dans la section 5.4 afin d'identifier les modules élastiques généralisés effectifs.

### 5.3.3 Existence du VER pour les conditions polynômiales aux limites

La question de l'existence d'un VER est essentielle pour l'établissement d'une fondation solide de la procédure d'homogénéisation. Considérons une microstructure périodique avec une cellule élémentaire  $V_0$ . Dans l'espace 3D, un élément de volume matériel  $V$  pourra être construit par pavement de  $N^3$  volumes  $V_0$  translatés. Les auteurs dans (Kouznetsova et al., 2004a) étudient les modules élastiques globaux du milieu du second gradient et se basent sur la condition de Dirichlet quadratique avec des valeurs croissantes de  $N$ . Ils trouvent que ces modules, dérivés à partir de la moyenne de la densité d'énergie, calculés dans  $V$  complet, pour chaque chargement, augmentent avec  $N$ , et ne convergent pas vers des propriétés effectives uniques. Dans (Pham, 2010), l'auteur explique que c'est une faiblesse fondamentale de la méthode et propose une alternative à la définition des modules effectifs qui ne dépend pas de  $N$ . C'est un pas significatif vers l'établissement de fondations solides pour l'homogénéisation d'ordre supérieur. Une perspective différente est proposée dans (Forest and Trinh, 2011). Au lieu du calcul de la densité d'énergie globale sur  $V$ , en augmentant  $N$ , nous proposons de calculer l'énergie uniquement sur la cellule élémentaire centrale. Cette carte d'énergie converge sous l'effet des conditions de chargement, comme montré dans l'exemple traité dans le chapitre précédent. De cette façon, le champ de fluctuation  $\underline{v}$  aux bords de la cellule centrale  $V_0$  est déterminée de façon exacte. Ce dernier ne s'exprime pas la propriété de périodicité usuelle. La technique sera appliquée dans la section suivante afin de vérifier si une telle convergence existe dans le cas du matériau considéré dans ce chapitre et s'il est possible de déterminer les modules effectifs de cette façon.

En particulier, l'analyse du champ de fluctuation à convergence de la taille du VER dans (Forest and Trinh, 2011) montre que la fluctuation contribue généralement de manière significative à la moyenne du second gradient du champ de déplacement. Ce dernier est donc différent des coefficient du terme quadratique dans l'expression polynômiale. Au contraire, la condition aux limites proposée dans (Kaczmarczyk et al., 2008) assure que la moyenne du second gradient de la fluctuation disparaît. Il faut donc comparer la fluctuation obtenue de l'analyse de convergence dans (Forest and Trinh, 2011) à celle proposée dans (Yuan et al., 2008; Kaczmarczyk et al., 2008; Bacigalupo and Gambarotta, 2010).

## 5.4 Identification des modules élastiques effectifs généralisés

### 5.4.1 Définition du matériau composite considéré

Le composite périodique choisi pour évaluer la méthode d'homogénéisation proposée se compose d'une phase élastique isotrope linéaire dure ( $h$ ) et d'une phase élastique isotrope linéaire molle ( $s$ ) :

$$E^h = 100000 \text{ MPa}, \quad \nu^h = 0.3, \quad E^s = 500 \text{ MPa}, \quad \nu^s = 0.3$$

Les deux phases affichent un contraste de 200 dans leur module de Young. La géométrie à deux dimensions de la cellule élémentaire  $V_0$  du composite périodique est montrée sur la figure 5.1(a). Elle met en évidence une symétrie orthotrope. La fraction volumique de la phase dure est  $f^h = 0.424$ . Toute la microstructure est obtenue par des translations dans les directions combinées 1 et 2. Il est possible de considérer un autre motif pour la cellule élémentaire du milieu périodique, comme celle présentée sur la figure 5.1(b). Elle sera utilisée afin de vérifier l'influence du choix de la cellule élémentaire sur la prédiction des propriétés effectives généralisées.

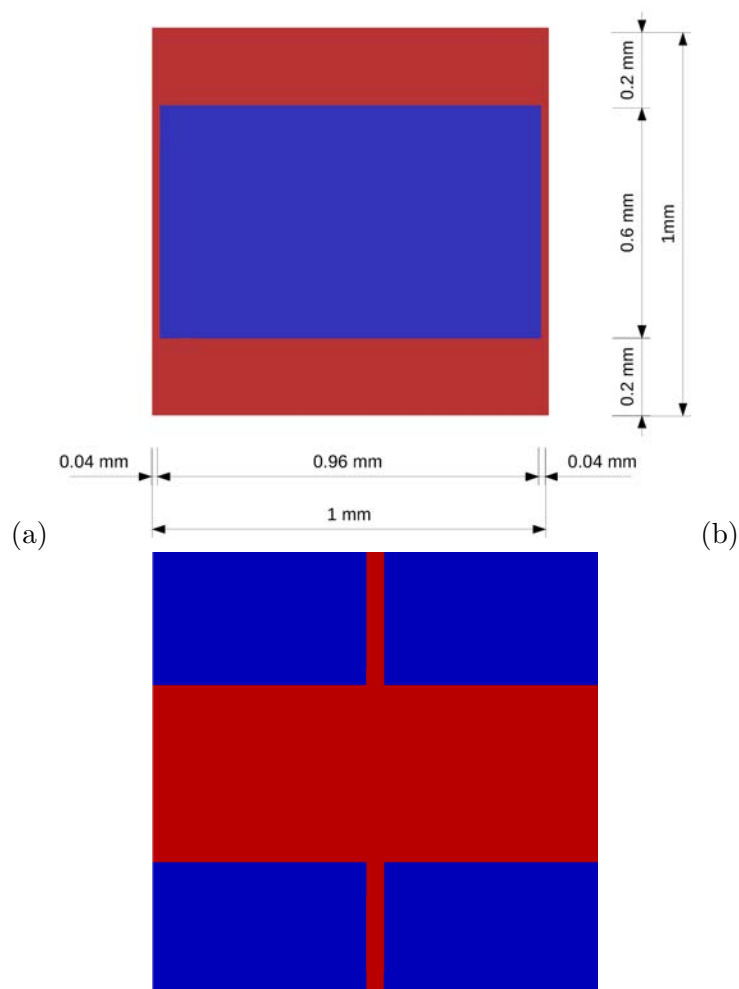


FIG. 5.1 – VER  $V_0$  du matériau composite périodique : (a) la géométrie de la cellule élémentaire, (b) seconde cellule élémentaire équivalente. La phase dure est rouge et la phase molle est bleue. Les axes d'orthotropie 1 et 2 sont successivement horizontal et vertical.

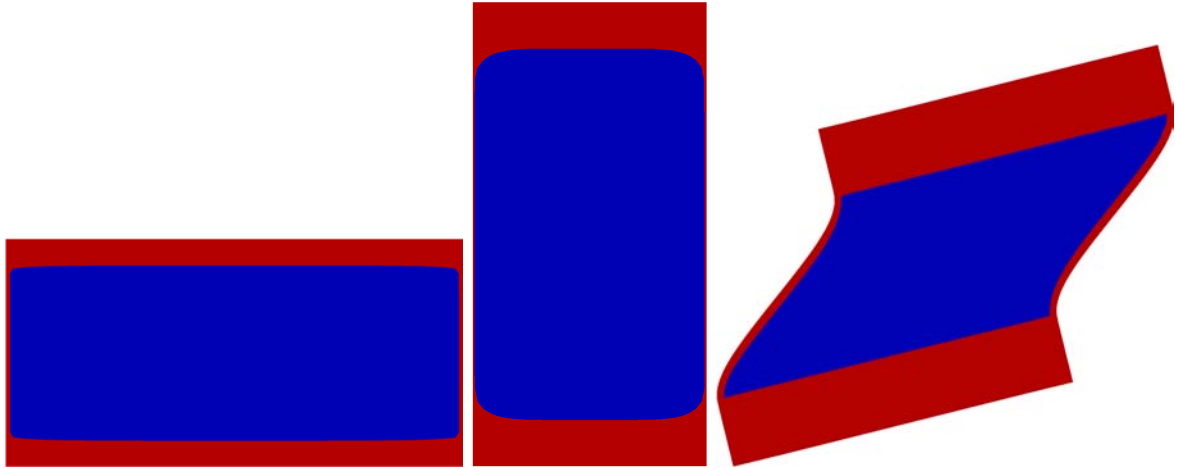


FIG. 5.2 – Conditions de chargement appliquées à un VER pour la détermination des propriétés effectives du matériau homogène équivalent de Cauchy. La première, second et troisième lignes correspondent successivement à  $E_{11} = 1, E_{22} = 1, E_{12} = E_{21} = 0.25$ . Dans chaque cas, les composantes restantes sont nulles.

#### 5.4.2 Identification des modules élastiques classiques

L'homogénéisation périodique classique est utilisée d'abord pour calculer les propriétés élastiques orthotropes du matériau effectif de Cauchy. Une moyenne de déformation  $E_{ij}$  est appliquée à la cellule élémentaire dans laquelle le champ de déplacement est sous la forme :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\tilde{E}} \cdot \underline{x} + \underline{v}(\underline{x}) \quad (5.25)$$

où  $\underline{v}$  est la fluctuation périodique de déplacement, prenant des valeurs identiques aux points homologues du bord  $\partial V_0$  de la cellule élémentaire. Les modules effectifs sont déterminés à partir de la moyenne de la densité d'énergie élastique produite par trois conditions de chargement successives indépendantes, comme illustré sur la figure 5.2. Les simulations EF sont réalisées sous la condition de déformation plane. Les modules trouvés sont fournis dans le tableau 5.1. Ils sont définis sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Par souci de comparaison, nous calculons également les modules apparents quand les conditions de déformation homogène aux limites sont appliquées à la cellule centrale, i.e quand la fluctuation est prise nulle :  $\underline{v} = 0, \forall \underline{x} \in \partial V_0$ . Ces conditions aux limites sont appelées KUBC (kinematic uniform boundary condition). Les modules apparents correspondants, également montrés dans le tableau 5.1, sont significativement plus raides que les modules effectifs venant de l'homogénéisation périodique, comme attendu.

#### 5.4.3 Identification des modules d'élasticité effectifs de Cosserat

Les modules effectifs du milieu global de Cosserat sont obtenus par la prescription successive d'une courbure moyenne  $\underline{K}$  et d'une moyenne de déformation relative  $\underline{e}$  via la

	$C_{11}$ (MPa)	$C_{12}$ (MPa)	$C_{22}$ (MPa)	$C_{44}$ (MPa)
periodic	44748	1579	7163	372
KUBC	45707	3181	9920	6186

TAB. 5.1 – Propriétés élastiques du matériau effectif de Cauchy.

	$Y_{1212}$ (MPa)	$Y_{1221}$ (MPa)	$Y_{2121}$ (MPa)	$C_{3131}$ ( $K_{31}$ ) MPa mm <sup>2</sup> ( mm <sup>-1</sup> )	$C_{3232}$ ( $K_{32}$ ) MPa mm <sup>2</sup> ( mm <sup>-1</sup> )
periodic	241250	-128383	69188	6788 (1.03)	2091 (0.9)
no fluctuation	976970	-616255	402759	5401 (1.17)	1502 (1.15)
converged field	–	–	–	6004 (1.07)	878 (1.33)

TAB. 5.2 – Propriétés du matériau effectif de Cosserat obtenues pour le VER de la figure 5.1(a).

	$Y_{1212}$ (MPa)	$Y_{1221}$ (MPa)	$Y_{2121}$ (MPa)	$C_{3131}$ ( $K_{31}$ ) MPa mm <sup>2</sup> ( mm <sup>-1</sup> )	$C_{3232}$ ( $K_{32}$ ) MPa mm <sup>2</sup> ( mm <sup>-1</sup> )
périodique	2383	-3270	6966	630.4 (1.01)	930.7 (0.994)
fluctuation nulle	3695941	-5472478	8109835	651.1 (1.01)	955.6 (1.08)
champ convergé	–	–	–	713 (1.07)	330 (0.58)

TAB. 5.3 – Propriétés élastiques du matériau effectif de Cosserat obtenues pour le VER de la figure 5.1(b).



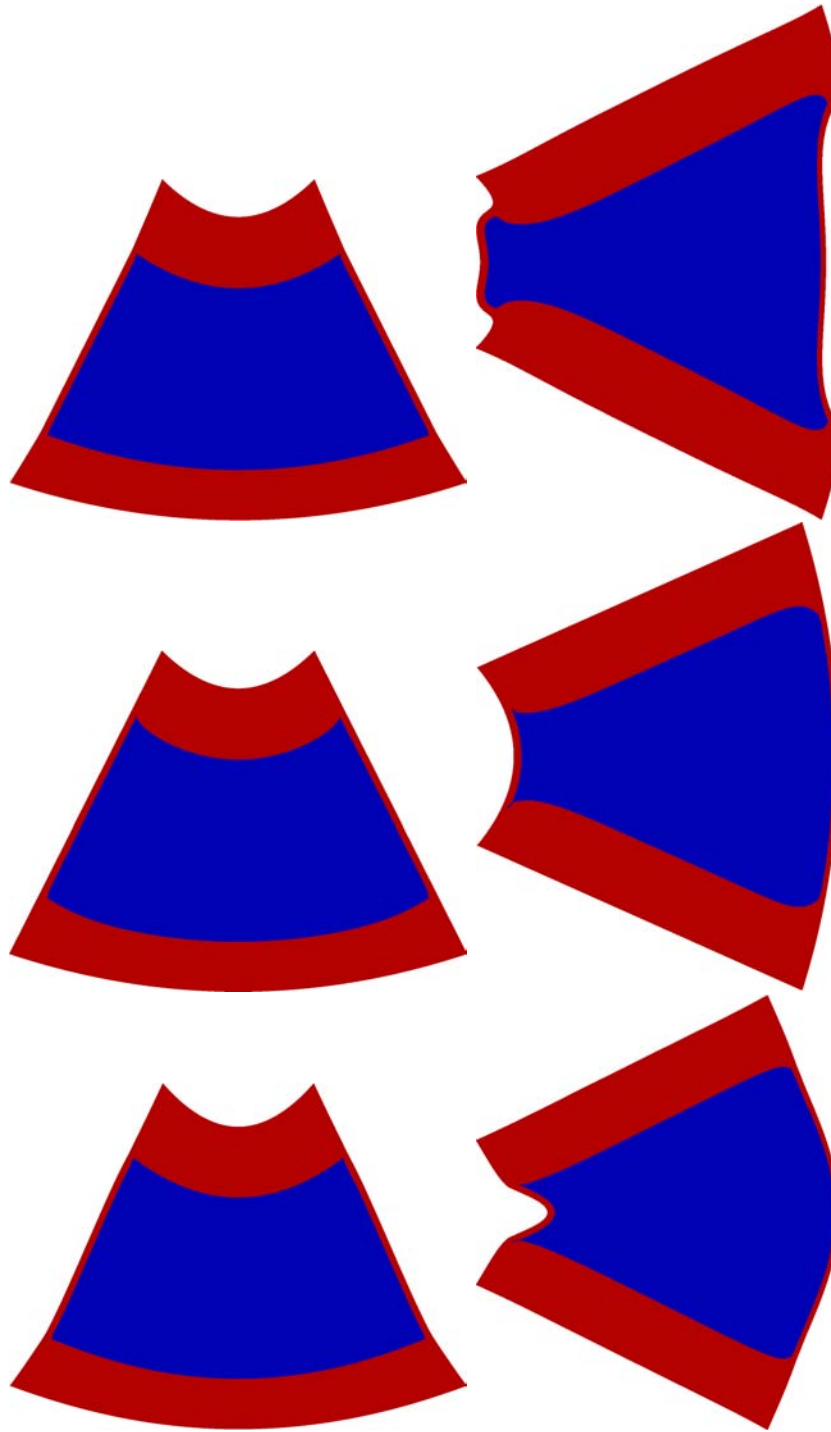


FIG. 5.3 – Conditions de chargement appliquées à un VER pour la détermination des propriétés effectives du matériau homogène équivalent de Cosserat. Les trois lignes correspondent successivement au champ de fluctuation périodique, nul, et convergé. La première et seconde lignes sont associées successivement à la courbure prescrite  $K_{31}$  et  $K_{32}$ .

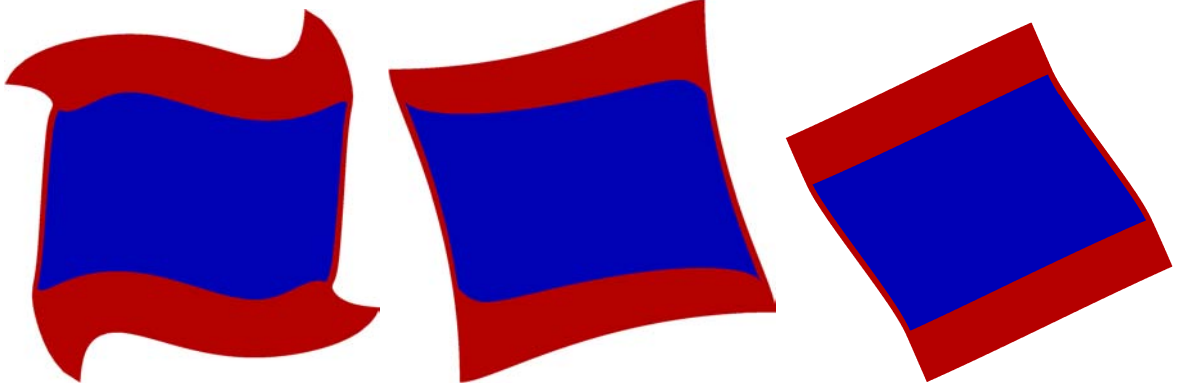


FIG. 5.4 – Etat déformé du VER sous l’application d’une déformation relative : condition aux limites périodique (gauche), fluctuation nulle (au milieu), état convergé (droite).

condition polynômiale de la forme :

$$u_1^* = D_{222}x_2^2 - 2D_{111}x_1x_2 + D_3(x_2^3 - 3x_1^2x_2) + v_1(x_1, x_2) \quad (5.27)$$

$$u_2^* = D_{111}x_2^2 - 2D_{111}x_1x_2 - D_3(x_1^3 - 3x_1x_2^2) + v_2(x_1, x_2) \quad (5.28)$$

qui représente un cas particulier de (5.21), proposé dans (Forest and Sab, 1998a). Les moyennes des composantes de la courbure  $K_{31}$  et  $K_{32}$  sont reliées directement aux coefficients prescrits  $D_{111}$  et  $D_{222}$  par la relation (5.20). La rotation relative  $e_{12} - e_{21}$  est dictée par la valeur  $D_3$  à travers les relations (5.4), (5.17) et (5.19). La partie symétrique  $e_{12} + e_{21}$  correspond à la composante  $2E_{12}$  de la déformation classique de cisaillement dans (5.26).

Les états déformés des VER sont présentés sur la figure 5.3 où les courbures  $K_{31}$  et  $K_{32}$  sont prescrites avec trois choix de champs de fluctuation : périodique, nul ou convergé. Le troisième type de fluctuation sera détaillé dans la sous-section suivante. L’effet de la fluctuation est visible principalement pour la courbure  $K_{32}$  en raison de la forte anisotropie du composite choisi. Les deux états déformés de la figure 5.4 (à gauche et au milieu) correspondent à la prescription de la rotation relative avec la fluctuation périodique et nulle.

L’énergie associée à chaque mode de déformation non-homogène est utilisée pour identifier les modules élastiques globaux, en se basant sur la condition de Hill-Mandel généralisée (5.18). La composante des contraintes anti-symétrique et les couples de contraintes sont liées à la déformation relative et à la courbure au travers de la relation :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} \\ M_{31} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{1212} & Y_{1221} & 0 & 0 \\ Y_{1221} & Y_{2121} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{3232} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{21} \\ K_{31} \\ K_{32} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

La symétrie orthotrope a été prise en compte pour l’écriture de la forme de cette matrice. Les modules correspondants sont déterminés à partir de l’énergie contenue dans l’état déformé présenté, et à partir de l’évaluation des mesures de déformation du milieu de Cosserat global, tous sont calculés par le post-traitement du calcul EF. Les valeurs des modules trouvés sont indiquées dans le tableau 5.2. Les modules  $C_{3131}$  et  $C_{3232}$  sont obtenus par l’application successive de  $D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$  et de  $D_{222} = 1 \text{ mm}^{-1}$  dans (5.28). Les courbures correspondantes sont calculées à l’aide de la formule de post-traitement (5.20). Elles sont différentes en fonction de type de fluctuation. Les modules de flexion trouvés sont proches.

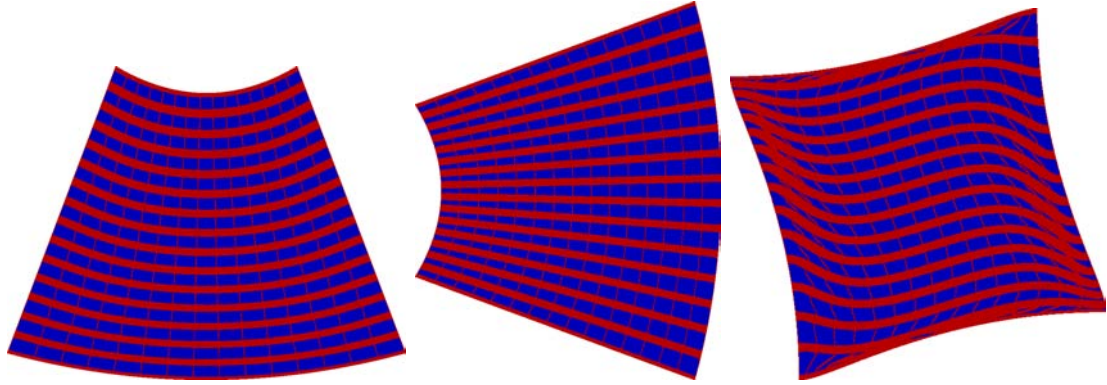


FIG. 5.5 – Etat déformé d'un volume élémentaire composite contenant  $15 \times 15$  cellules, soumis à la condition polynômiale (5.28) avec  $D_{111} = 1 \text{ mm}^{-1}$  (gauche),  $D_{222} = 1 \text{ mm}^{-1}$  (milieu) et  $D_3 = 1$ , les coefficients restants sont mis à zéro.

Au contraire, les modules contrôlant la partie anti-symétrique des contraintes globales sont significativement différents selon que la fluctuation est périodique ou nulle.

Les modules  $C_{3131}$  et  $C_{3232}$  sont également valables pour un milieu à couple de contraintes pour lequel la micro-rotation  $\underline{\Phi}$  est contrainte à coïncider avec la rotation matérielle (Bouyge et al., 2001a). Ainsi, la combinaison des modules, intervenant dans l'expression de la partie anti-symétrique des contraintes globales, devient un multiplicateur de Lagrange.

Les propriétés globales de Cosserat et à couples de contraintes sont aussi déterminées dans le cas du VER secondaire de la figure 5.1(b) suivant la même procédure. Les valeurs mises dans le tableau 5.3 montrent une dépendance significative des modules généralisés par rapport au choix du motif, la morphologie en croix menant à des modules généralisés considérablement plus mous.

#### 5.4.4 La taille du VER pour les propriétés du milieu global de Cosserat et du second gradient

L'influence du mode de fluctuation, introduit dans la condition aux bords dans le calcul de la section précédente, indique qu'il y a sans aucun doute un effet de couche limite induit par les conditions polynomiales. Afin d'éliminer cet effet de bord, on considère un volume élémentaire contenant une quantité croissante de cellules élémentaires. Ce volume est une collection de  $N \times N$  cellules élémentaires, avec  $N = 1, 3, 5, \dots$  jusqu'à  $N = 27$  dans les simulations suivantes. On cherche une taille  $M$  pour laquelle, la distribution d'énergie dans une zone fixée par la taille  $M \times M$  ne varie plus quand la condition polynômiale est appliquée au loin avec les mêmes coefficients du polynôme. La taille obtenue de la zone fixée sera nommée la taille du VER pour la condition polynômiale considérée. En particulier, l'attention est portée sur la distribution d'énergie à l'intérieur de la cellule centrale.

Dans le cas de l'homogénéisation classique où la condition affine  $\underline{u}^* = \underline{E} \cdot \underline{x}$  est utilisée, il est connue qu'une telle procédure mène à un champ stable de contraintes-déformation dans volume élémentaire. En particulier, la fluctuation au bord de la cellule élémentaire, définie comme la différence entre le champ obtenu de déplacement et la contribution affine  $\underline{v} = \underline{u}^{rel} - \underline{E} \cdot \underline{x}$ , s'avère être périodique.

Pour des conditions de Dirichlet plus générale, prescrites sur le bord, on peut examiner la convergence du champ mécanique pour une taille croissante. On définit la fluctuation  $\underline{v}$  de la même manière et on examine ses propriétés aux bords de la cellule centrale. Ce programme a été réalisé dans le chapitre précédent et dans la référence (Forest and Trinh, 2011) pour

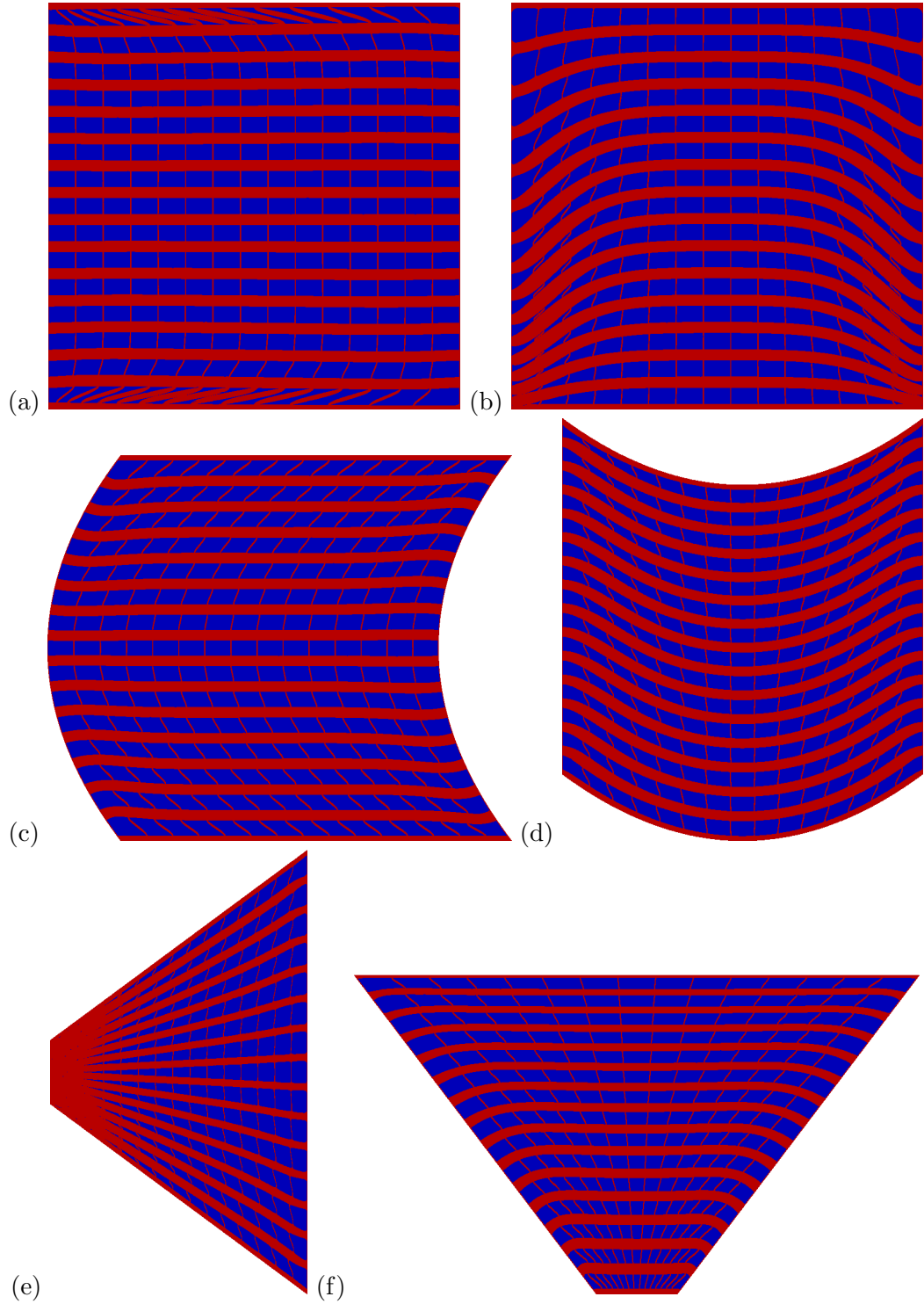


FIG. 5.6 – Déformation du VER à  $15 \times 15$  cellules élémentaires correspondant à la condition de Dirichlet aux bords : (a)  $D_{111} : \underline{u} = 1/2x_1^2 \underline{e}_1$ , (b)  $D_{222} : \underline{u} = 1/2x_2^2 \underline{e}_2$ , (c)  $D_{122} : \underline{u} = 1/2x_2^2 \underline{e}_1$ , (d)  $D_{211} : \underline{u} = 1/2x_1^2 \underline{e}_2$ , (e)  $D_{212} : \underline{u} = x_1x_2 \underline{e}_2$ , (f)  $D_{112} : \underline{u} = x_1x_2 \underline{e}_1$ .

N×N-cell	$D_{111} = 1$	$D_{122} = 1$	$D_{212} = 1$	$D_{112} = 1$	$D_{211} = 1$	$D_{222} = 1$
3x3	3	19	1033	527	368	324
7x7	2	0.12	789	6176	660	227
9x9	1.3	0.3	761	6079	565	89
11x11	0.9	0.4	759	5930	474	27
15x15	0.5	0.33	770	5714	371	1.8
21x21	0.4	0.32	776	5587	325	0.2
27x27	0.33	0.32	777	5548	315	0.2

TAB. 5.4 – Moyenne de la densité d'énergie élastique dans la cellule centrale du volume élémentaire N×N-cellules soumis à la condition quadratique de Dirichlet. Les composantes  $D_{ijk}$  sont données en  $\text{mm}^{-1}$  et la valeur d'énergie élastique est en MPa.

un matériau composite de type grille avec une condition polynômiale quadratique. Il est appliqué de nouveau à la micro-structure de la figure 5.1 dans ce chapitre. Il est également utile de déterminer les propriétés correspondantes du milieu global de Cosserat, du second gradient et de comparer ces dernières avec les autres estimations basées sur différents choix de fluctuations.

Les condition polynômiales de Cosserat (5.28), avec  $\underline{v} = 0$ , sont prescrites aux bords d'un volume élémentaire 15×15 sur la figure 5.5. Une flexion claire est observée sur la sous-figure à gauche et au milieu de la figure 5.5 tandis que seule la couche au bord semble être affectée par le polynôme du troisième ordre sur la sous-figure à droite, laissant la cellule centrale quasiment non déformée. Ces calculs ont été réalisés de 1×1 jusqu'à 27×27 pour vérifier si l'état de déformation convergée est atteint. Ces états convergés sont indiqués en bas de la figure 5.3 pour la flexion et à droite de la figure 5.4 pour le chargement en déformation relative. Le mode de convergence en flexion est identifiée clairement alors que la déformation de la cellule centrale se rapproche d'une rotation du corps rigide, quand le polynôme de troisième ordre est appliqué.

La même stratégie est effectuée dans le cas des six modes de déformation 2D correspondant au polynôme quadratique entier dans l'équation (5.21) :  $D_{111}, D_{222}, D_{122}, D_{211}, D_{212}, D_{112}$ . Les déformations associées au volume élémentaire 15x15 cellules sont exposées sur la figure 5.6. La forme convergée de la cellule centrale est montrée sur la figure 5.7, avec une même grossissement. Les modes  $D_{111}, D_{222}$  et  $D_{122}$  produisent une déformation limitée dans la cellule centrale alors que  $D_{211}, D_{212}, D_{112}$  affectent la forme de la cellule de manière significative. La densité d'énergie élastique  $\langle \sigma : \xi \rangle_{V_0}$  sur toute la cellule centrale élémentaire  $V_0$ , associée à six modes est montrée dans le tableau 5.4, en fonction de la taille  $N$  du volume élémentaire. La convergence vers une valeur finie d'énergie est atteinte pour les modes  $D_{211}, D_{212}, D_{112}$  tandis que le matériau est insensible aux modes  $D_{111}, D_{222}$  et  $D_{122}$ .

La convergence affichée pour la collection des cellules assure qu'un VER est atteint. Pourtant, une quantité assez grande de cellules est nécessaire pour détecter l'énergie. Une analyse détaillée confirme que la fluctuation correspondant à la réponse de la cellule centrale n'est pas périodique, comme montré dans le chapitre précédent (Forest and Trinh, 2011).

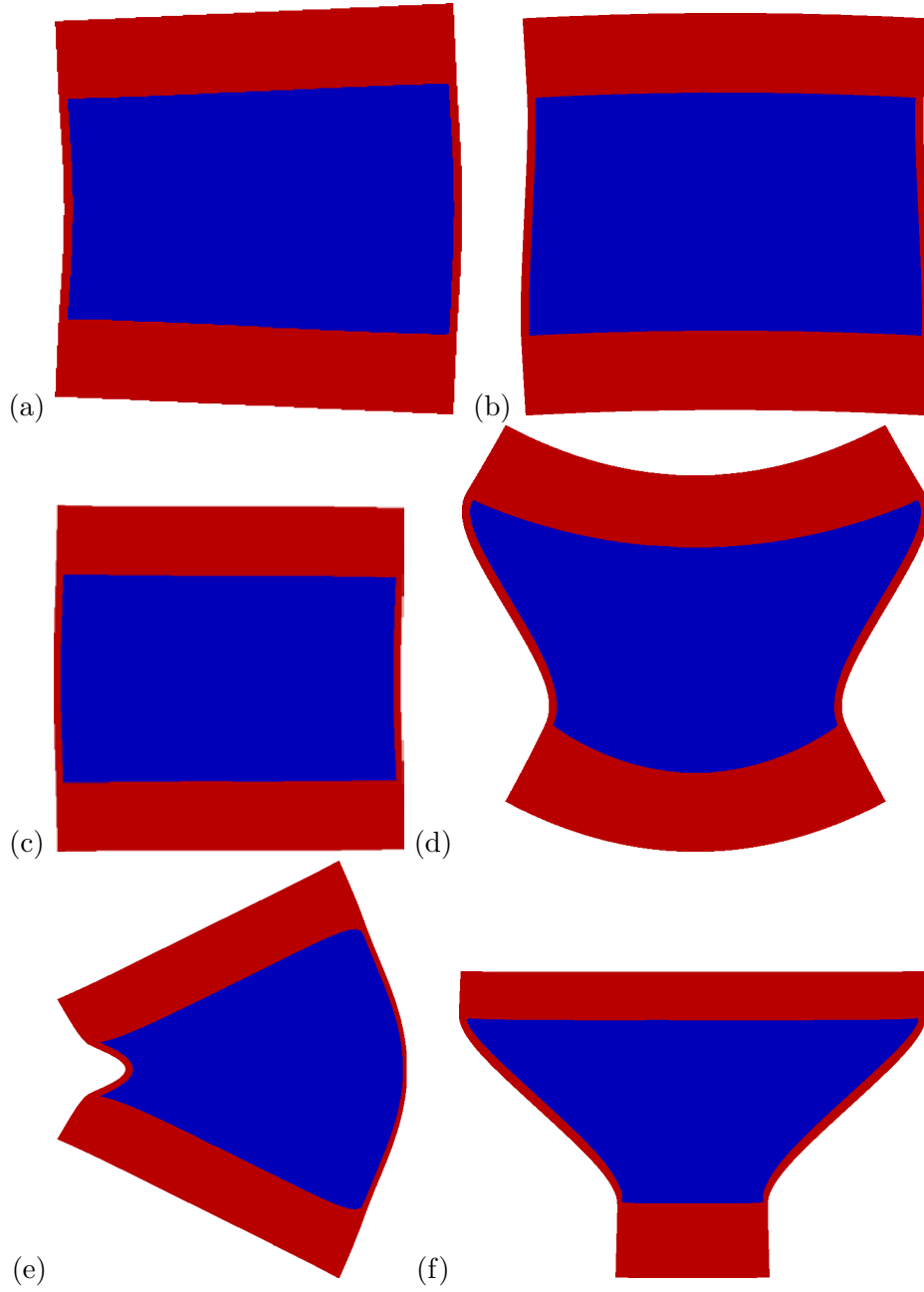


FIG. 5.7 – Forme de la cellule centrale du volume élémentaire 15x15 soumis à la condition de Dirichlet au bord : (a)  $D_{111} : \underline{\mathbf{u}} = 1/2x_1^2\mathbf{e}_1$ , (b)  $D_{222} : \underline{\mathbf{u}} = 1/2x_2^2\mathbf{e}_2$ , (c)  $D_{122} : \underline{\mathbf{u}} = 1/2x_2^2\mathbf{e}_1$ , (d)  $D_{211} : \underline{\mathbf{u}} = 1/2x_1^2\mathbf{e}_2$ , (e)  $D_{212} : \underline{\mathbf{u}} = x_1x_2\mathbf{e}_2$ , (f)  $D_{112} : \underline{\mathbf{u}} = x_1x_2\mathbf{e}_1$ .

### 5.4.5 Identification des modules effectifs du modèle du second gradient élastique

La condition polynômiale quadratique de chargement  $D_{ijk}$  peut être utilisée pour identifier les propriétés élastiques du milieu global du second-gradient. Le tenseur des contraintes  $\Sigma$  est relié encore au tenseur de déformation  $\underline{E}$  par les modules (5.26). Dans un milieu centro-symétrique, le tenseur des contraintes doubles  $M_{ijk} = M_{ikj}$  est relié linéairement au second gradient de déplacement  $K_{ijk} = K_{ikj}$  par la matrice des modules doubles élastiques. La structure du tenseur d'élasticité d'ordre 6 du matériau anisotrope second-gradient a été analysée par (Auffray et al., 2009; Auffray et al., 2010). Dans la situation la plus générale, la représentation matricielle associée s'écrit :

$$\begin{bmatrix} M_{111} \\ M_{122} \\ \sqrt{2}M_{212} \\ M_{222} \\ M_{211} \\ \sqrt{2}M_{121} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{111111} & A_{111122} & \sqrt{2}A_{111212} & A_{111222} & A_{111211} & \sqrt{2}A_{111121} \\ A_{122111} & A_{122122} & \sqrt{2}A_{122212} & A_{122222} & A_{122211} & \sqrt{2}A_{122121} \\ \sqrt{2}A_{212111} & \sqrt{2}A_{212122} & 2A_{212122} & \sqrt{2}A_{212222} & \sqrt{2}A_{212211} & 2A_{212121} \\ A_{222111} & A_{222122} & \sqrt{2}A_{222212} & A_{222222} & A_{222211} & \sqrt{2}A_{222121} \\ A_{211111} & A_{211122} & \sqrt{2}A_{211212} & A_{211222} & A_{211211} & \sqrt{2}A_{211121} \\ \sqrt{2}A_{121111} & \sqrt{2}A_{121122} & 2A_{121212} & \sqrt{2}A_{121222} & \sqrt{2}A_{121211} & 2A_{121121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{111} \\ K_{122} \\ K_{212} \\ K_{222} \\ K_{211} \\ K_{121} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Cette notation, utilisant la racine carrée de  $K_{212}$  et de  $M_{212}$ , définit une vraie représentation matricielle du tenseur de double élasticité. Le rangement des composantes du second gradient de déplacement comme proposé dans la représentation matricielle ci-dessus, mène dans le cas orthotrope au système non-couplé suivant :

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & A_{56} \\ 0 & 0 & 0 & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

avec les notations simplifiées :

$$[K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4 \ K_5 \ K_6] = [K_{111} \ K_{122} \ \sqrt{2}K_{212} \ K_{222} \ K_{211} \ \sqrt{2}K_{121}] \quad (5.32)$$

$$[M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4 \ M_5 \ M_6] = [M_{111} \ M_{122} \ \sqrt{2}M_{212} \ M_{222} \ M_{211} \ \sqrt{2}M_{121}] \quad (5.33)$$

et

$$[A_{11} \ A_{12} \ A_{13} \ A_{22} \ A_{23} \ A_{33}] = [A_{111111} \ A_{111122} \ \sqrt{2}A_{111212} \ A_{122122} \ \sqrt{2}A_{122212} \ 2A_{212212}] \quad (5.34)$$

$$[A_{44} \ A_{45} \ A_{46} \ A_{55} \ A_{56} \ A_{66}] = [A_{222222} \ A_{222211} \ \sqrt{2}A_{222121} \ A_{211211} \ \sqrt{2}K_{211121} \ 2K_{121121}] \quad (5.35)$$

Il y a donc 12 modules doubles élastiques indépendants à identifier à partir de l'analyse de la réponse du VER soumis aux conditions non homogènes de chargement. Il est nécessaire de déterminer douze conditions de chargement correspondant à douze ensembles

	$A_{11}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{22}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{33}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{12}$ MPa.mm <sup>2</sup>	$A_{23}$ MPa.mm <sup>2</sup>	$A_{13}$ MPa.mm <sup>2</sup>
non fluctuation	134601	37436	124 548	68706	67368	127 213
	$A_{44}$	$A_{55}$	$A_{66}$	$A_{45}$	$A_{46}$	$A_{56}$
non fluctuation	69445	2801	32 175	40762	11 094	7 548

TAB. 5.5 – Les propriétés élastiques d’ordre supérieur du matériau global du second gradient pour la cellule élémentaire de la figure 5.1(a). La fluctuation est prise nulle aux bords de cellule.

de valeurs des coefficients  $D_{ijk}$ . Les six conditions, sélectionnées pour l’identification du premier bloc de 6 constantes dans la matrice (5.31), sont labellisées ( $a, b, c, d, e, f$ ). Six conditions supplémentaires sont nécessaires pour le deuxième bloc. Pour chaque chargement, la procédure de post-processing fournit la moyenne de la densité d’énergie  $2\epsilon = \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{V_0}$  dans la cellule élémentaire centrale et la courbe globale  $K_1, K_2$  et  $K_3$ . La moyenne de la densité d’énergie au niveau local relie la densité d’énergie au niveau global sous la forme :

$$2\epsilon = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5 & K_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & A_{56} \\ 0 & 0 & 0 & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Les six cas d’énergie donnent le système suivant d’équations pour trouver les modules élastiques d’ordre supérieur :

$$\begin{bmatrix} 2\epsilon_a \\ 2\epsilon_b \\ 2\epsilon_c \\ 2\epsilon_d \\ 2\epsilon_e \\ 2\epsilon_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1a}^2 & K_{2a}^2 & K_{3a}^2 & 2K_{1a}K_{2a} & 2K_{2a}K_{3a} & 2K_{1a}K_{3a} \\ K_{1b}^2 & K_{2b}^2 & K_{3b}^2 & 2K_{1b}K_{2b} & 2K_{2b}K_{3b} & 2K_{1b}K_{3b} \\ K_{1c}^2 & K_{2c}^2 & K_{3c}^2 & 2K_{1c}K_{2c} & 2K_{2c}K_{3c} & 2K_{1c}K_{3c} \\ K_{1d}^2 & K_{2d}^2 & K_{3d}^2 & 2K_{1d}K_{2d} & 2K_{2d}K_{3d} & 2K_{1d}K_{3d} \\ K_{1e}^2 & K_{2e}^2 & K_{3e}^2 & 2K_{1e}K_{2e} & 2K_{2e}K_{3e} & 2K_{1e}K_{3e} \\ K_{1f}^2 & K_{2f}^2 & K_{3f}^2 & 2K_{1f}K_{2f} & 2K_{2f}K_{3f} & 2K_{1f}K_{3f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ A_{12} \\ A_{23} \\ A_{13} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Un système similaire existe quand  $K_4, K_5, K_6$  sont activés.

Les modules d’ordre supérieur trouvés sont inscrits dans le tableau 5.5 pour une fluctuation nulle  $\underline{v}$  dans (5.21) au bord de la cellule élémentaire  $V_0$ . On ne détermine pas les modules correspondants aux états convergés de la cellule élémentaire enfoncée dans un volume élémentaire  $N \times N$  à cause des modes à zéro énergie indiqués précédemment qui rendent le système précédent indéterminé. Ces obstacles seront précisés dans la section 5.4.4. Une procédure spécifique est nécessaire pour déterminer les termes nuls de la matrice globale, qui est exprimée dans (Bacigalupo and Gambarotta, 2010).

Les modules d’ordre supérieur obtenus de la procédure précédente sont très élevés par rapport aux modules de flexion de Cosserat.



### 5.4.6 Identification des modules élastiques effectifs micromorphes

Dans le but d'obtenir les modules effectifs du milieu global micromorphe, un polynôme cubique de la forme :

$$\begin{aligned} u_i^* = & \left( U_{i,1} - \frac{5}{2} e_{i1} \right) x_1 + \left( U_{i,2} - \frac{5}{2} e_{i2} \right) x_2 + \frac{10}{l^2} e_{i1} x_1^3 + \frac{10}{l^2} x_2^3 \\ & + \frac{1}{2} D_{i11} x_1^2 + \frac{1}{2} (D_{i12} + D_{i21}) x_1 x_2 + \frac{1}{2} D_{i22} x_2^2 - \frac{l^2}{24} (D_{i11} + D_{i22}) \end{aligned} \quad (5.38)$$

est introduit avec une longueur de la cellule centrale égale à  $l = 1$  mm. C'est le polynôme choisi par (Jänicke, 2010), pour la construction d'un milieu micromorphe de substitution. On distingue d'un côté les composantes de degré pair du polynôme, i.e. constante et la partie quadratique, associée aux coefficients  $D_{ijk}$ , et de l'autre côté, les composantes de degrés impairs du polynôme, contrôlées par le gradient de déplacement et la déformation relative. La partie constante du polynôme représente un mouvement du corps rigide du volume élémentaire et assure que le centroïde du volume reste à une position fixée lors de la déformation provoquée par  $D_{ijk}$ . Les coefficients de la part quadratique sont pris symétriques par rapport aux deux derniers indices  $D_{ijk} = D_{ikj}$  (comme mentionné dans la section 5.3). La partie cubique du polynôme est limitée aux composantes dépendant de  $x_i^3$ . Aucun terme cubique croisé n'est pris en compte, pour des raisons données dans (Jänicke, 2010). L'identification des coefficients du polynôme par les règles présentées dans (5.1) et (5.2) implique que la part cubique est reliée à la déformation relative, tandis que la part linéaire est liée à la déformation relative ainsi qu'au gradient de déplacement global. On simplifie le problème en considérant que le champ local  $\underline{u}$  dans la cellule élémentaire est entièrement donné par (5.38). Par conséquent, on néglige la fluctuation dans (5.21). Dans ce cas, on trouve :

$$K_{ijk} = D_{ijk} \quad (5.39)$$

Suite à cette approximation, l'identité de Hill-Mandel (5.8) fournit une définition explicite des contraintes d'ordre supérieur :

$$M_{ijk} = \langle \sigma_{i(j} x_k) \rangle \quad (5.40)$$

où les parenthèses dans les indices indiquent la symétrisation par rapport aux indices correspondants. Il faut noter que le polynôme choisi (5.38) ne permet pas de distinguer entre  $K_{ijk}$  et  $K_{ikj}$  bien que la distinction soit nécessaire pour identifier un milieu micromorphe complet. Cependant, il n'est pas pris en compte ici en raison de la complexité du développement polynômial nécessaire (order 4).

Plusieurs états déformés de la cellule élémentaire suite à l'application de  $U_{i,j}$  et de  $e_{ij}$  sont présentés sur la figure 5.8. L'évaluation de la condition de Hill-Mandel généralisée (5.8) permet alors d'identifier les modules élastiques globaux. Prenant en compte la symétrie orthotrope, les composantes du tenseur symétrique des contraintes  $\underline{\Sigma}$ , et du tenseur des contraintes relatives  $\underline{S}$  sont calculés :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ S_{11} \\ S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{1111} & Y_{1122} & Z_{1111} & Z_{1122} \\ Y_{1122} & Y_{2222} & Z_{2211} & Z_{2222} \\ \eta_{1111} & \eta_{1122} & \zeta_{1111} & \zeta_{1122} \\ \eta_{2211} & \eta_{2222} & \zeta_{1122} & \zeta_{2222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ e_{11} \\ e_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{12} \\ S_{12} \\ S_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{1212} & Y_{1212} & Z_{1212} & Z_{1221} \\ \eta_{1212} & \eta_{1212} & \zeta_{1212} & \zeta_{1221} \\ \eta_{2112} & \eta_{2112} & \zeta_{1221} & \zeta_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ e_{12} \\ e_{21} \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

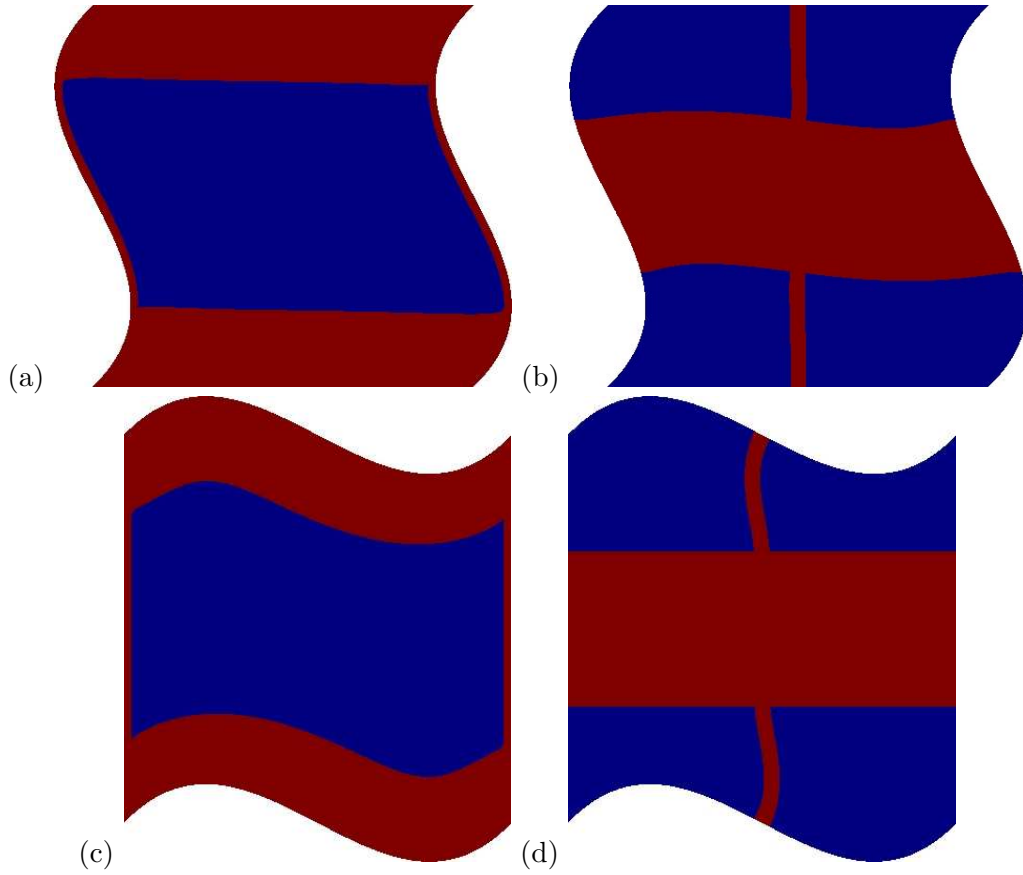


FIG. 5.8 – Conditions de chargement appliquées aux différentes cellules élémentaires destinées à la détermination des propriétés effectives du milieu micromorphe homogène équivalent : (a) and (c)  $\underline{u} = (-5/2 x_1 + 10/l^2 x_1^3) e_{12} \underline{e}_1$ , (b) and (d)  $\underline{u} = (-5/2 x_2 + 10/l^2 x_2^3) e_{21} \underline{e}_2$ .

La matrice des modules d'ordre supérieur (dans le calcul des contraintes doubles), est identique à la relation (5.31) lorsque la partie antisymétrique de  $K_{ijk}$  selon les deux derniers indices est négligée. Les modules élastiques pour les deux configurations de cellule élémentaire 5.1(a) et (b) sont données explicitement dans le tableau 5.6.

Les modules d'ordre supérieur déterminés à partir de ce schéma simplifié sont trouvés significativement plus petits que ceux trouvés dans le tableau 5.5. Leurs magnitudes sont comparables aux modules de Cosserat de flexion. Comme pour le milieu global de Cosserat, la morphologie de croix (la figure 5.1(b)) mène à des modules élastiques significativement plus faibles que ceux de première morphologie (la figure 5.1(a)).

## 5.5 Validation de la méthode d'homogénéisation d'ordre supérieur

La performance des différentes propriétés généralisées globales, déterminées suivant plusieurs méthodes dans la section précédente, est évaluée en considérant un problème de référence pour une structure composée d'un nombre fini et limité de cellules élémentaires comme sur la figure 5.1(a). Les limites du milieu de Cauchy sont d'abord illustrées et les améliorations par les milieux de substitution de Cosserat, second gradient et micromorphe sont présentées ensuite.

	$Z_{1111}$ (MPa)	$Z_{1122}$ (MPa)	$Z_{2211}$ (MPa)	$Z_{2222}$ (MPa)	$Z_{1212}$ (MPa)	$Z_{1221}$ (MPa)
(a)	2425	7001	5616	12064	16619	7166
(b)	-168	-4557	-101	-10717	-10492	-118
	$\eta_{1111}$ (MPa)	$\eta_{1122}$ (MPa)	$\eta_{2211}$ (MPa)	$\eta_{2222}$ (MPa)	$\eta_{1212}$ (MPa)	$\eta_{2112}$ (MPa)
(a)	2426	5616	7001	12064	16620	7165
(b)	-168	-101	-4557	-10716	-10490	-118
	$\zeta_{1111}$ (MPa)	$\zeta_{1122}$ (MPa)	$\zeta_{2222}$ (MPa)	$\zeta_{1212}$ (MPa)	$\zeta_{1221}$ (MPa)	$\zeta_{2121}$ (MPa)
(a)	92751	17508	57280	51441	19806	47275
(b)	848	98	24119	23964	47275	733

	$A_{11}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{22}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{33}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{12}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{23}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{13}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )
(a)	2733	1051	1122	-1233	333	-469
(b)	28.0	52.7	623	-20.7	52.9	-285
	$A_{66}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{55}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{44}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{56}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{45}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$A_{46}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )
(a)	3892	865	1138	315	-541	-42.0
(b)	438	271	288	121	-258	-106

TAB. 5.6 – Propriétés élastiques d'ordre supérieur du matériau micromorphe global de la cellule élémentaire de la figure 5.1(a) et (b), fluctuation nulle.

### 5.5.1 Calcul de structure de référence et mise en défaut de l'approche de Cauchy

On considère la structure composite constituée de 10x5 cellules de la figure 5.9 (à gauche). Les conditions aux limites suivantes sont considérées sur cette structure. Le côté gauche de la structure est encasté, i.e.  $U_1 = U_2 = 0$ . Les bords horizontaux (supérieur et inférieur) sont libres d'effort. La composante verticale de déplacement  $U_2 = 1$  mm est prescrite sur le côté droit. La composante horizontale de déplacement  $U_1$  est laissée libre sur le côté droit. L'état déformé correspondant de la structure est présenté sur la figure 5.9 (à droite). Il montre une combinaison des modes de cisaillement et de flexion.

Le même problème de structure est considéré mais avec le milieu homogène substitutif de Cauchy, caractérisé les propriétés élastiques du tableau 5.1. Les mêmes conditions d'encastement au bord  $U_1 = U_2 = 0$  sont prescrites sur le côté gauche. L'état déformé correspondant est présenté sur la gauche de la figure 5.10. On relève que le milieu de Cauchy ne capture pas le mode de flexion de la structure composite et ne présente que le mode de cisaillement. Il est possible de faire une comparaison quantitative comme sur la figure 5.11 où le profil de déplacement  $U_2(x_1)$  est donné le long d'une ligne horizontale à proximité de la mi-section de la structure, comme montré sur la figure 5.9. La flexion provoquée par l'encastement est vraiment évidente sur la référence et est absente de la prédiction de Cauchy. Ce phénomène avait déjà été noté pour un matériau stratifié dans (Forest and Sab, 1998a; Bacigalupo and Gambarotta, 2010).

### 5.5.2 Calcul avec trois milieux généralisés homogènes substitutifs différents

Les milieux de Cosserat et à couple de contraintes possèdent la rigidité de flexion qui peut améliorer la description homogène de la structure de composite. Le problème de structure précédent est de nouveau considéré pour un tel milieu de Cosserat de substitution caractérisé les propriétés effectives de la table 5.2 et 5.3. Des conditions aux limites supplémentaires sont nécessaires pour un tel milieu de Cosserat. Elles concernent les degrés de liberté de micro-rotation. L'encastement est pris en compte en prenant  $\Phi_3 = 0$  sur le bord gauche de la structure, comme on le ferait dans un problème similaire de poutre et de plaque composites. La figure 5.11 (à gauche) donne le déplacement le long de la ligne centrale déjà considérée, tel qu'il est prédit par le milieu de Cosserat en utilisant les modules effectifs obtenus avec une fluctuation périodique pour les deux cellules élémentaires de la figure 5.1. La prédiction est vraiment proche des résultats de référence et améliore notablement la prévision insuffisante du milieu de Cauchy. Les modules basés sur la cellule contenant la croix dure délivrent une réponse un peu plus souple tandis que l'autre est légèrement trop rigide. La prédiction utilisant la condition périodique est cependant meilleure que la réponse du milieu de Cosserat doté de modules obtenus avec une perturbation nulle sur le bord de la cellule élémentaire. Ce fait est montré sur la figure 5.11 (à droite). Enfin, un accord presque parfait entre les milieux de référence et de substitution homogène est obtenu lorsque les modules convergés sont utilisés, suivant la table 5.2.

Lorsque la structure est un milieu du second gradient homogène caractérisé par les propriétés de la table 5.5, l'état déformé de la figure 5.10 (à droite) et la comparaison quantitative sur la figure 5.12 (à gauche) ne montrent aucune amélioration significative. Peut-être que cela est dû au fait que l'on utilise les modules déterminés pour une fluctuation nulle. Les modules convergés n'ont pas pu être déterminés, comme indiqué précédemment. Une stratégie spécifique devrait être développée dans le but d'identifier les modules convergés pertinents.

Les résultats obtenus ainsi avec le modèle du second gradient indiquent que notre exemple

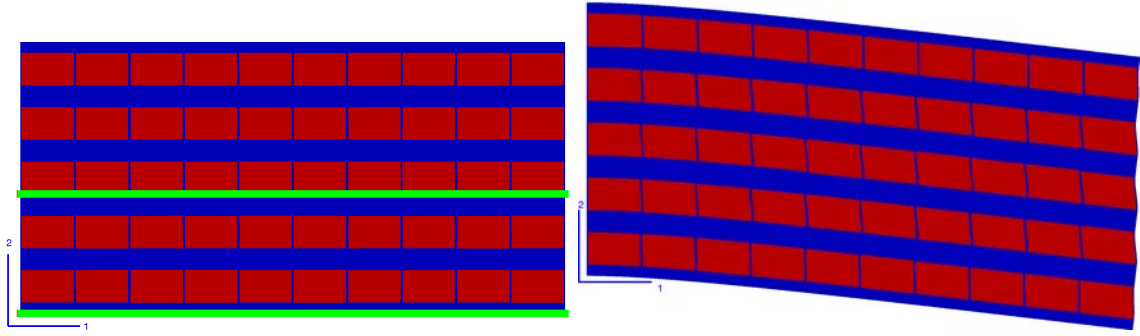


FIG. 5.9 – Structure composite de référence composée de 10x5 cellules (à gauche) et sa déformée (à droite). Deux lignes horizontales sont montrées le long desquelles certaines grandeurs sont post-traitées.

ne permet pas de trancher sur le milieu continu de substitution le mieux adapté. Le milieu de Cosserat s'avère suffisant. D'autres problèmes de structures devront être considérés.

Le milieu micromorphe est disponible dans le code ZéBuLoN. Pour obtenir le milieu du second gradient, on peut utiliser le milieu micromorphe en utilisant un terme de pénalisation assurant que la micro-déformation coïncide avec le gradient du champ de déplacement. L'encastrement est imposé via la prescription de micro-déformations nulles sur le bord gauche de la structure. Il faut noter que le choix des conditions aux limites supplémentaires est un problème complètement ouvert et que les conditions utilisées ici pour les micro-rotations et micro-déformations sont heuristiques. Cette difficulté se présente de manière tout à fait similaire dans le cas des modèles de poutres et de plaques.

Enfin, la même simulation a été réalisée avec le modèle micromorphe homogène utilisant les modules effectifs de la table 5.6. La réponse du milieu micromorphe de substitution est aussi montrée sur la figure 5.12 (à droite). Elle est en bon accord avec le calcul de référence. Les deux cellules élémentaires considérées délivrent successivement une réponse légèrement plus rigide et plus souple que la référence.

Le fait que le modèle micromorphe apparaît moins performant en comparaison avec la prédiction Cosserat dans la figure 5.11 (à gauche) et 5.12 (à droite) est sans doute dû au fait que la fluctuation n'a pas été considérée dans l'identification des modules. Il reste encore à développer une méthode d'identification prenant en compte la fluctuation pour construire un milieu effectif micromorphe complet.

Un exact ajustement serait possible en augmentant significativement le module de flexion de Cosserat et le modèle du second gradient mais cela n'est pas fait ici car cela ne correspondrait pas à la stratégie d'homogénéisation adoptée.

Il y a une autre remarque venant de la comparaison : des valeurs significativement différentes des modules d'ordre supérieur peuvent mener à des résultats très proches. Cela signifie que la réponse est dans une certaine mesure peu sensible aux variations des modules d'ordre supérieur. Concrètement, dans l'exemple proposé, seul l'ordre de grandeur du module de flexion est essentiel à la description correcte de l'effet de flexion. Ce fait confirme le statut de "correcteur" à l'amélioration apportée par les termes d'ordre supérieur. Dans le futur, des essais plus discriminants devront être proposés pour départager le rôle des différents types de milieux continus généralisés.

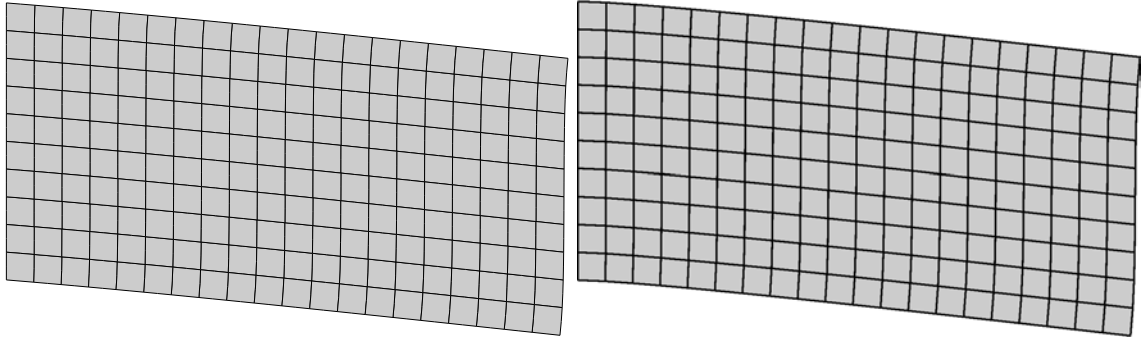


FIG. 5.10 – L'état déformé de la structure homogène de substitution qui subit la même condition de chargement en déplacement que dans 5.9(b) : milieu de substitution de Cauchy (à gauche) et milieu micromorphe de substitution (à droite).

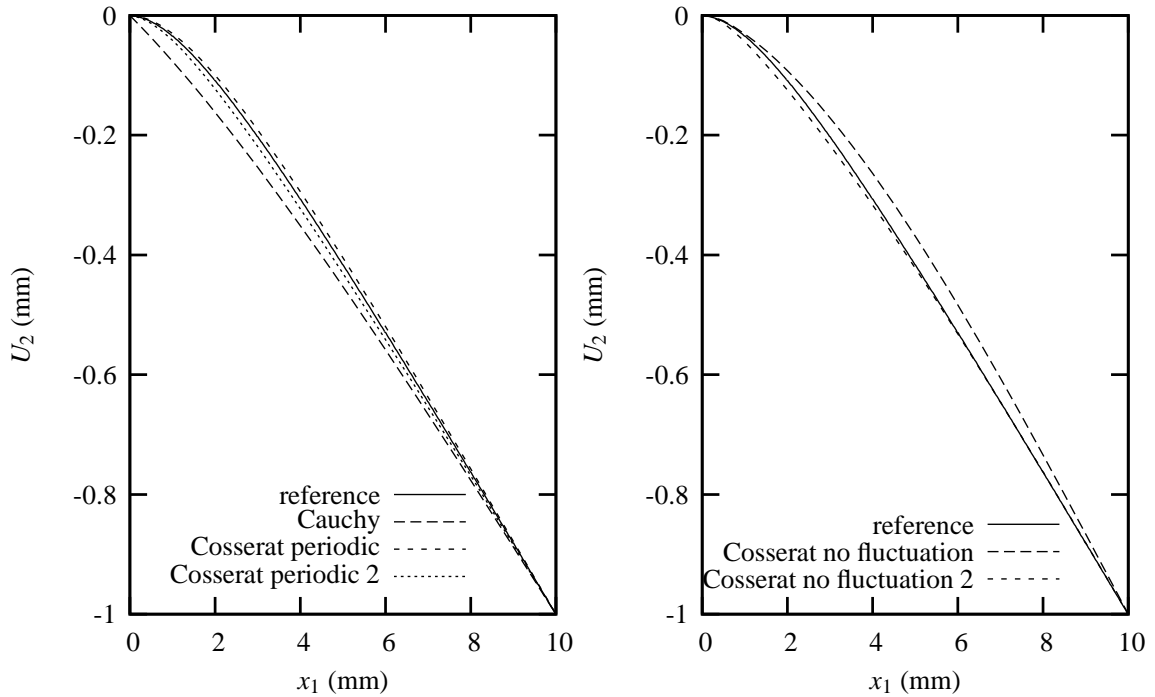


FIG. 5.11 – Le déplacement vertical  $U_2$  le long de la ligne à mi-hauteur visible dans la figure 5.9 calculé pour la structure de référence et 3 différents milieux de substitution : Milieu de Cauchy, de Cosserat doté de coefficients dans la table 5.2 (fluctuation périodique) pour deux cellules élémentaires de la figure 5.1(a) and (b) (libellé 2) (à gauche), modèle de Cosserat pour la fluctuation nulle et pour les deux cellules centrales (à droite).

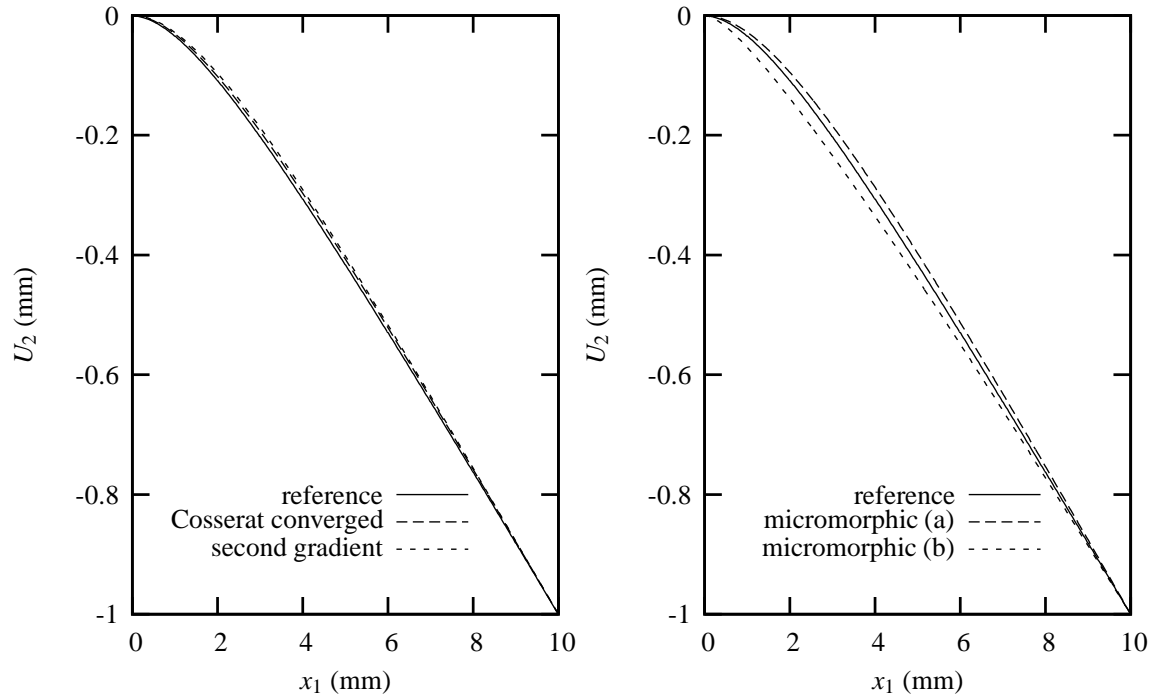


FIG. 5.12 – Le déplacement vertical  $U_2$  le long de la ligne à mi-hauteur visible sur la figure 5.9 calculé pour la structure de référence et 3 différents milieux de substitution : modèle de Cosserat (modules convergés de flexion) et modèle du second gradient avec les coefficients des tables 5.2 et 5.5 pour la cellule élémentaire de la figure 5.1(a) (à gauche), le modèle micromorphe avec deux groupes de coefficients de le tableau 5.6, correspondant aux cellules élémentaires de la figure 5.1(a) and (b) (à droite).

Moduli	$Y_{1111}$	$Y_{2222}$	$Y_{1122}$	$Y_{1212}$	$Y_{1221}$	$Y_{2121}$	$C_{3131}$	$C_{3232}$
Coefficients	$E_{11}^2$	$E_{22}^2$	$2E_{11}E_{22}$	$e_{12}^2$	$2e_{12}e_{21}$	$e_{21}^2$	$K_{31}^2$	$K_{32}^2$
Case 1	1	0	0	0	0	0	0	0
Case 2	0	1	0	0	0	0	0	0
Case 3	1	1	2	0	0	0	0	0
Case 4	0	0	0	1	0	0	0	0
Case 5	0	0	0	0	1	0	0	0
Case 6	0	0	0	1	2	1	0	0
Case 7	0	0	0	0	0	0	1	0
Case 8	0	0	0	0	0	0	0	1

TAB. 5.7 – Les cas de chargement nécessaires pour l’identification des modules globaux de Cosserat.

## 5.6 Validation et relocalisation dans le cas d’autres conditions de chargement d’une structure composite

Dans cette partie, l’homogénéisation d’ordre supérieur est également appliquée sur une autre structure avec plus des chargements différents afin de valider à nouveau l’approche proposée. Dans ce cas, le milieu généralisé choisi est le modèle de Cosserat. Une procédure de relocalisation est également réalisée pour montrer comment le milieu homogène équivalent peut être utilisé pour reproduire les contraintes locales au sein du matériau à partir des résultats d’un calcul de structure globale. La procédure est bien connue dans le cas de l’homogénéisation classique. Elle reste encore ouverte dans le cas généralisé.

Un matériau périodique à deux phases est considéré dont la cellule élémentaire est montrée dans la figure 5.13(a). La longueur du côté de la cellule élémentaire carrée est  $l = 1$  mm comme d’habitude. La phase foncée de matrice est 10000 fois plus rigide que la phase grise de l’inclusion. Elles sont supposées isotropes. Les modules de Young sont successivement 100000 MPa et 10 MPa. Les deux phases ont le même coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . La fraction volumique de la phase dure est  $f = 23.2$  %. Il faut noter que la microstructure présente deux plans symétriques orthogonaux qui mènent à la symétrie élastique orthotrope. Les modules élastiques effectifs du milieu de Cauchy sont présentés dans le tableau 5.8. Les modules élastiques effectifs du milieu de Cosserat et du second gradient ont été déterminés pour ce matériau sous la condition de déformation plane dans les sections précédentes de ce chapitre et publiés dans (Trinh et al., 2011). Les modules globaux du milieu de Cosserat sont donnés dans le tableau 5.9. Les solutions analytiques du problème de double cisaillement exigent la connaissance des modules  $Y_{1212}$ ,  $Y_{1221}$ ,  $Y_{2121}$  and  $C_{3232}$ . Dans le cas du milieu effectif du second gradient, on n’a besoin que des valeurs de  $C_{44}$  (regarder dans le tableau 5.8) et du module d’ordre supérieur

$$A_{22} = 11668 \text{MPa} \cdot \text{mm}^2$$

dans la matrice (5.31). La méthode d’identification des modules est expliquée dans le chapitre précédent (Trinh et al., 2011) et dans 4.6.3.

### 5.6.1 Cas analytique et cas d’un chargement combiné

La validation de l’homogénéisation d’ordre supérieur est effectuée premièrement par la comparaison des résultats d’un calcul de référence numérique par éléments finis d’un problème



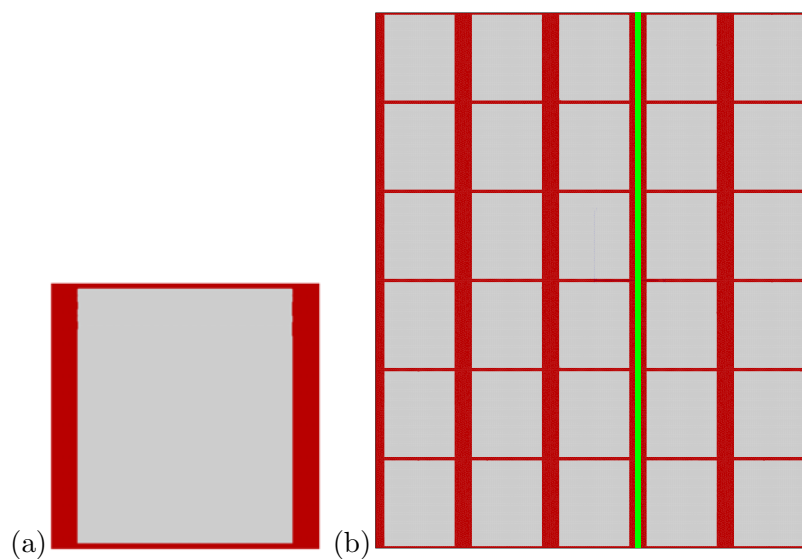


FIG. 5.13 – La cellule élémentaire du matériau composite périodique (à gauche) ; structure de  $5 \times 6$  cellules soumise à plusieurs conditions de chargement (à droite). La valeur des déplacements après déformation sera tracée le long de la ligne verte indiquée sur la structure.

$C_{11}$ (MPa)	$C_{12}$ (MPa)	$C_{22}$ (MPa)	$C_{44}$ (MPa)
4939	465	22066	17

TAB. 5.8 – Les propriétés élastiques du milieu homogène effectif de Cauchy.

$Y_{1212}$ (MPa)	$Y_{1221}$ (MPa)	$Y_{2121}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$C_{3131}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	$C_{3232}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )
51203	-73977	106985	803	3858

TAB. 5.9 – Les propriétés élastiques du milieu homogène de substitution de Cosserat.

où la structure hétérogène subit un chargement externe de double cisaillement et la prédiction par la solution analytique avec le milieu de substitution de Cosserat et du second gradient. Puis, un chargement plus complexe est considéré pour lequel le calcul par éléments finis est de nouveau comparé à la solution numérique de référence.

### 5.6.2 Deux calculs de référence

Le matériau composite considéré se compose de  $5 \times 6$  cellules élémentaires, comme le montre la figure 5.13(b). Des déplacements horizontaux opposés et un déplacement vertical nul sont appliqués sur les côtés en haut et en bas de la structure comme conditions aux limites, cf. figure 5.14(a). L'état déformé de cette structure est montré sur la figure 5.15(a). On considèrera également la condition de chargement de la figure 5.14(b) qui combine la flexion et le cisaillement. Le côté en bas est encastré tandis que le côté en haut est tourné de  $30^\circ$  par rapport au centre géométrique de la structure. L'état déformé correspondant est indiqué sur la figure 5.16(a). Ils sont obtenus par la méthode élément fini dans le contexte d'élasticité linéaire.

### 5.6.3 Comparaison des prédictions de Cauchy, de Cosserat et second-gradient

Pour les deux chargements, on compare les réponses des milieux homogènes équivalents de Cauchy, de Cosserat et du second gradient au calcul de référence par éléments finis. Les simulations éléments finis ont été effectuées pour les milieux globaux de Cauchy et de Cosserat. Quant au milieu global second-gradient, la prédiction analytique (2.2.2) est considérée pour la comparaison dans le cas du double cisaillement.

Les états déformés de la structure homogène de Cauchy et de Cosserat sont montrés sur les figures 5.15 et 5.16(b) et (c). Dans le problème de double cisaillement, la réponse de structure de Cauchy est entièrement dominée par la déformation de cisaillement, contrairement à la structure de référence qui subit une flexion significative dans une couche limite en haut et en bas. La flexion est bien rendue dans le cas d'une structure homogène de Cosserat, grâce aux conditions supplémentaires qui ont été prescrites à la surface en haut et en bas. Ces conditions sont la micro-rotation nulle  $\Phi_3$  pour la condition d'encastrement, de manière analogue au problème d'une poutre de Timoshenko.

Le milieu de Cosserat reproduit également de manière satisfaisante l'état déformé de la structure sous la condition de chargement plus complexe de la figure 5.16(c). On a appliqué les conditions aux limites extrêmes  $\Phi_3 = 0$  en bas et  $\Phi_3 = 30^\circ$  en haut. En particulier, une légère bosse sur le bord latéral gauche est capturé par le modèle de Cosserat mais ce n'est pas le cas avec le modèle de Cauchy.

Une comparaison plus quantitative est possible en considérant la composante  $U_1$  de déplacement le long de la ligne verticale dessinée sur la structure de la figure 5.13(b). Les courbes de la figure 5.17(a) confirment que le double cisaillement inclut une combinaison de cisaillement et de flexion qui est reproduite parfaitement par le modèle de Cosserat et pas du tout par le matériau homogène équivalent de Cauchy.

Il faut noter que le modèle du second gradient donne aussi une excellente estimation du profil de déplacement, sans différence visible avec la prédiction de Cosserat. Ce résultat peut surprendre dans la mesure où le module de flexion  $A_{22}$  du milieu du second gradient est significativement plus grand que celui de Cosserat  $C_{3232}$ . Cela confirme le résultat déjà indiqué précédemment de l'influence limitée des variations de modules d'ordre supérieur pourvu que l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique soit le bon.

Au contraire, les courbes de la figure 5.17(b) montrent que tous les deux milieux de Cosserat et de Cauchy rendent compte correctement du déplacement horizontal le long de la

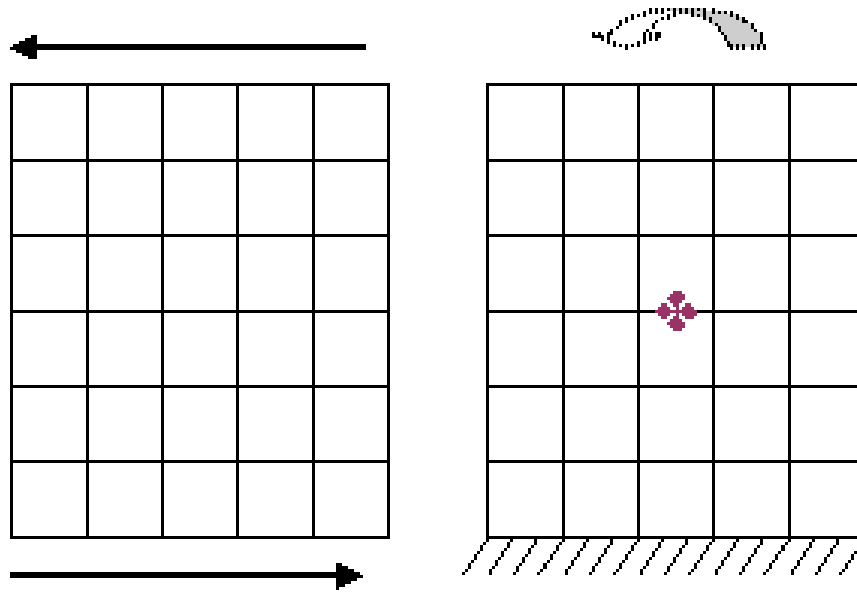


FIG. 5.14 – Deux conditions de chargement pour la structure composite : cisaillement double (à gauche) et la combinaison de flexion–cisaillement (à droite).

ligne verticale. La réponse de Cosserat est même légèrement moins bonne que la réponse classique dans cet exemple. Toutefois, les courbes de la figure 5.18 montrent clairement l'amélioration apportée par les conditions supplémentaires aux limites du milieu de Cosserat car la réponse près du bord est mieux prédite par le milieu de Cosserat que par le milieu de Cauchy.

#### 5.6.4 Relocalisation des déformations

Comme montré dans les sections précédentes, la simulation du déplacement macroscopique est réalisée avec succès. Deux modèles de milieux généralisés : de Cosserat et du second-gradient ont été utilisés et tous les deux donnent le bon résultat. Le problème d'homogénéisation est résolu au niveau macroscopique. Au niveau microscopique, il faut considérer la relocalisation des champs locaux (de contraintes, de déformation)... Les idées essentielles de cette procédure sont présentées sur la figure 5.19. La relocalisation est réalisée suivant les pas :

- On choisit une (des) cellule(s) particulière(s) du calcul de référence pour laquelle (lesquelles) on étudie le champ des déformations locales.
- Sur le milieu homogène de substitution correspondant, on détermine l'emplacement des cellules considérées au point précédent. On calcule les moyenne des déformations et des courbures sur ce volume.
- Le VER qui est utilisé pour calculer les modules effectifs est repris. On applique les déformations et courbure moyennes à la cellule élémentaire dans le cas d'une fluctuation convergée.
- La distribution des déformations de la cellule élémentaire est comparée avec la distribution de référence.

Enfin, ces distributions de déformations  $\varepsilon_{12}$  dans les cellules seront présentées sur la figure 5.20.

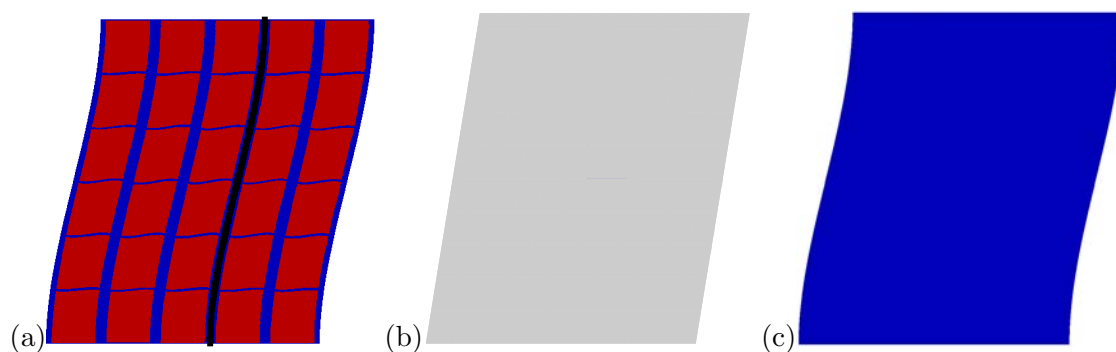


FIG. 5.15 – Les états déformés de la structure  $5 \times 6$  cellules, soumise à un double cisaillement avec les conditions d'encastrement, obtenus par simulation éléments finis : (a) Le calcul de référence ; (b) l'utilisation du milieu homogène effectif de Cauchy ; (c) l'utilisation du milieu homogène de substitution de Cosserat.

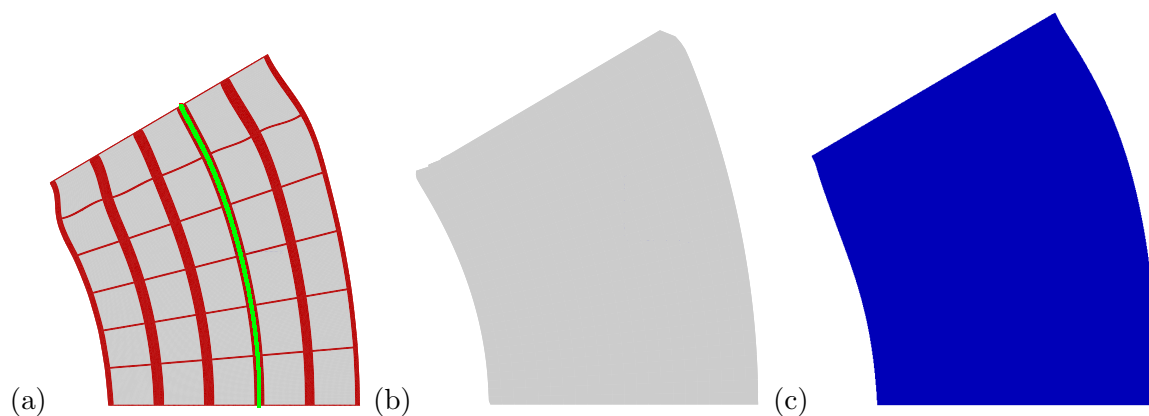


FIG. 5.16 – Les états déformés de structure  $5 \times 6$  cellules, soumise au chargement combiné de flexion-cisaillement : (a) Le calcul de référence ; (b) l'utilisation du milieu homogène effectif de Cauchy ; (c) l'utilisation du milieu homogène de substitution de Cosserat.

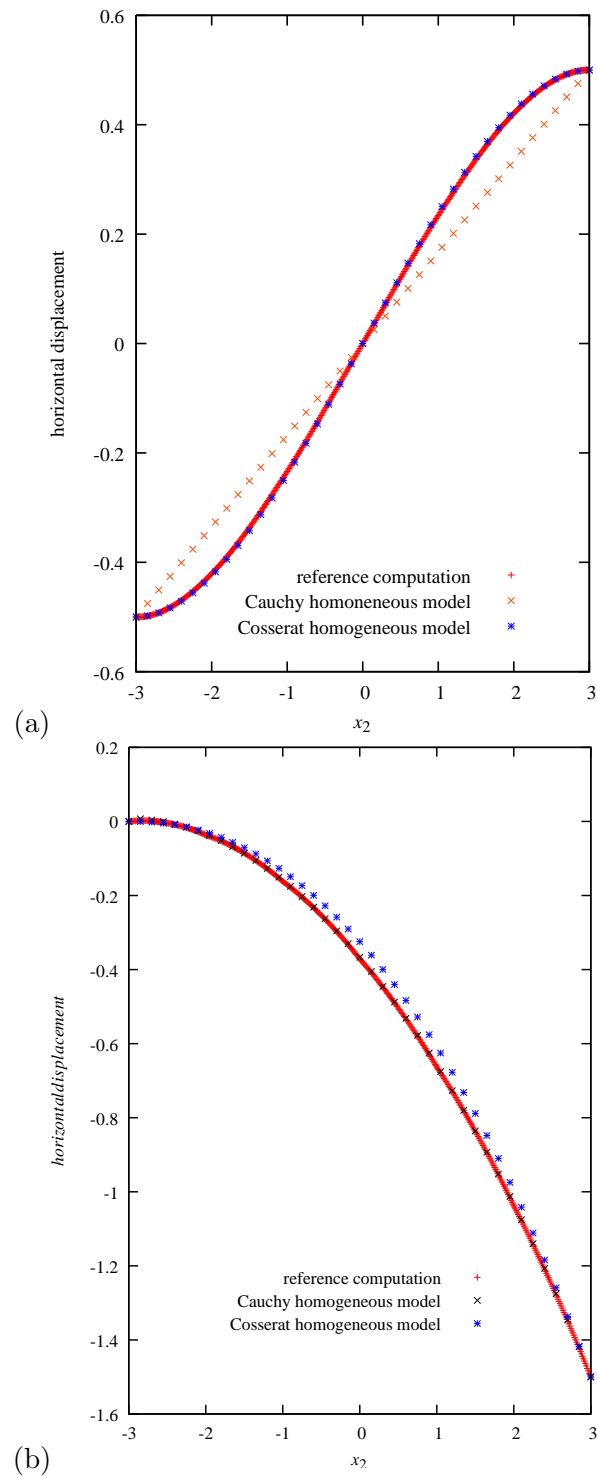


FIG. 5.17 – Le profil de déplacement le long de la ligne verticale indiquée dans la figure 5.13 : chargement de double cisaillement (a) et chargement de rotation (b).

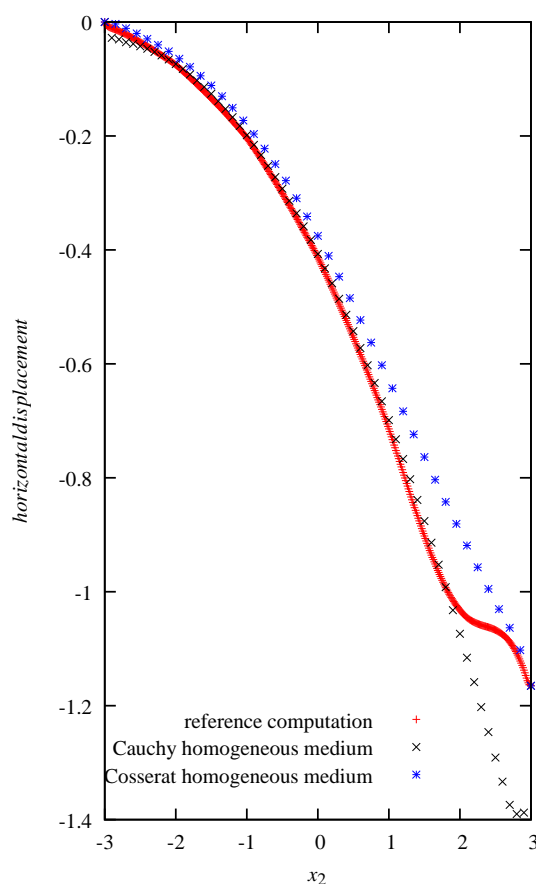


FIG. 5.18 – Le déplacement horizontal sur le bord à gauche de la structure  $5 \times 6$  cellules, soumise à la rotation avec les conditions d'encastrement, obtenu par simulation éléments finis dans la figure 5.16.

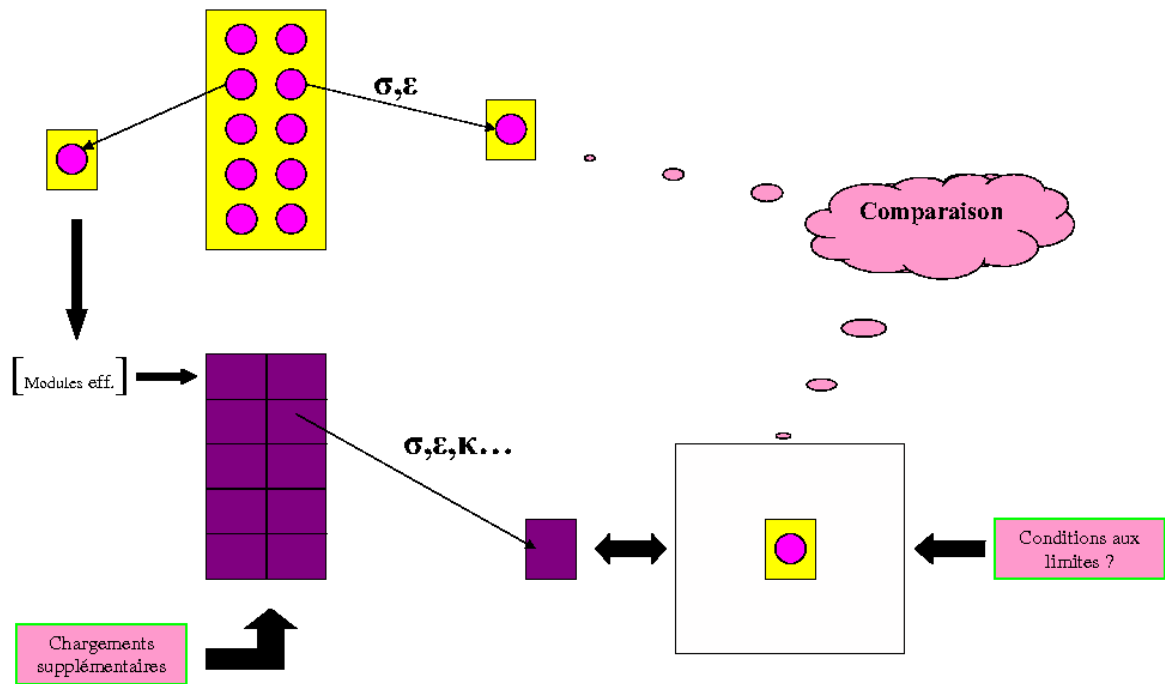


FIG. 5.19 – Le schéma de la procédure de relocalisation.

On peut observer la bonne distribution des déformations dans la troisième cellule de la demi-bande en considération mais moins bonne dans la cellule au bord de gauche. Cela signifie que l'effet de bord n'est pas bien pris en compte avec le choix du modèle de Cosserat comme milieu de substitution. En effet, les courbes de contraintes dans le diagramme 5.21 montrent un fort gradient de déformation dans la cellule du bord. Le milieu de Cosserat n'est pas en mesure d'en rendre compte. Le modèle du second-gradient peut-être sera une meilleure solution dans ce cas. Ce calcul n'est pas encore fait dans cette thèse.

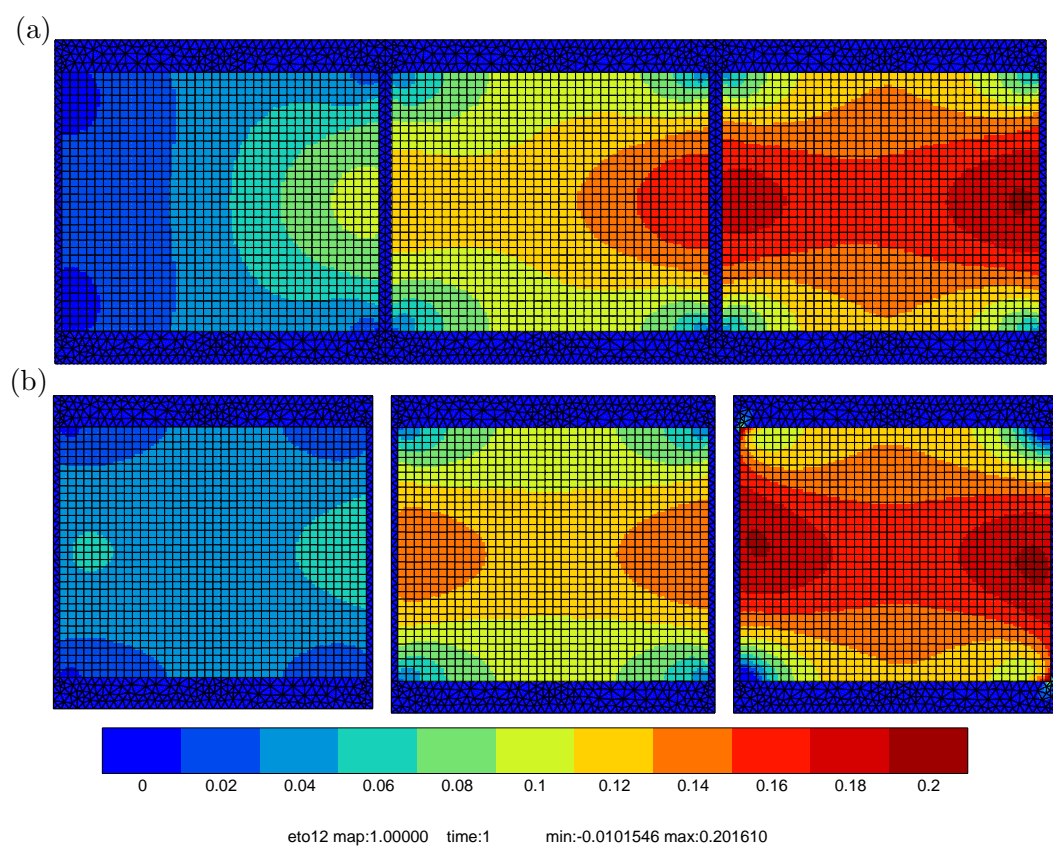


FIG. 5.20 – La relocalisation de déformation  $\varepsilon_{12}$  dans une demi-bande au milieu de la plaque : la déformation obtenue par le calcul de référence (a) la déformation obtenue par le calcul d'homogénéisation (b).



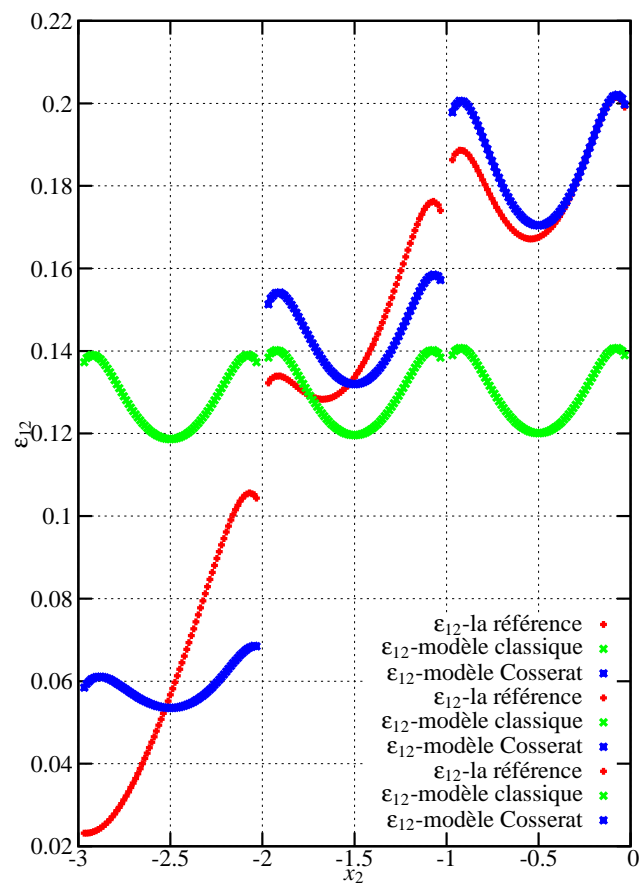


FIG. 5.21 – Diagramme de déformation de référence et de déformation relocalisée.



**Chapitre 6**

**Conclusion**

Les propriétés globales mécaniques d'un modèle de Cosserat, du second-gradient et micromorphe ont été déterminées pour des composites élastique à deux phases à fort contraste de propriétés élastiques. L'attention s'est concentrée sur l'impact du choix de la fluctuation de déplacement sur les propriétés effectives d'ordre supérieur lorsque des conditions non homogènes de déformation sont imposées. Trois possibilités ont été examinées : fluctuation nulle, périodique ou fluctuation convergée au sens de la définition d'un VER pour les conditions non homogènes de déformation imposées. Les champs de fluctuation nulle et périodique délivrent des modules de flexion très proches tandis que le module de flexion convergé est plus petit, en tout cas sur quelques exemples considérés dans ce travail. Nous avons montré que l'application de conditions non-homogènes au contour d'une cellule élémentaire provoque un effet de bord significatif. Au contraire, quand les conditions non homogènes sont appliquées au bord d'un assemblage de  $N \times N$  cellules, un état limite est observé permettant de caractériser complètement la fluctuation. De cette façon, une taille de VER a pu être définie, ici environ  $9 \times 9$  cellules pour les exemples traités. Cette analyse de convergence a été réalisée pour les 6 coefficients du polynôme quadratique et pour les coefficients impliquées dans la construction d'un milieu de Cosserat effectif.

Dans la microstructure de stratifié, quelques conditions de chargement ont été trouvées qui conduisent à des modes à énergie nulle dans la cellule élémentaire, lorsqu'elles ont été appliquées suffisamment loin des bords. Ce fait a également été noté par (Bacigalupo and Gambarotta, 2010) qui se basent sur un différent choix de fluctuation. Ce mode d'énergie nous a empêché à déterminer une matrice complète des modules d'ordre supérieur associés à l'état convergé. Mais une procédure particulière devrait être développée pour déterminer la partie non singulière du tenseur d'élasticité d'ordre 2.

Un point essentiel de la discussion apparu dans ce travail est que, pour différentes fluctuations considérées, la moyenne du module second gradient ne coïncide pas avec le coefficient de  $D_{ijk}$  du polynôme quadratique. C'est pourquoi la formulation de post-traitement (5.6), appliquée au modèle global du second gradient (et micromorphe), a été mise en avant. En se basant sur cette expression, les modules globaux du second gradient ont été déterminés pour une seule cellule élémentaire avec la fluctuation nulle. L'approche adoptée par (Jänicke et al., 2009; Jänicke, 2010) a été utilisée pour la détermination de tous les modules micromorphes. Elle suppose que  $K_{ijk}$  coïncide aux coefficients du polynôme et devra donc être étendue pour lever cette limitation.

L'hypothèse de fluctuation nulle est trouvée moins efficace pour le terme de troisième degré requis dans l'analyse de Cosserat. En fait, les modules Cosserat trouvés associant la partie anti-symétrique du tenseur de contraintes à la rotation relative, sont fortement différents entre deux hypothèses : perturbation nulle ou périodique. Dans le cadre de modélisation micromorphe, un choix spécial du polynôme de troisième ordre a été nécessaire dans (Jänicke, 2010) dans le but de donner des modules plus pertinents concernant le problème de validation. En fait, les polynômes de troisième et de quatrième degrés sont nécessaires pour identifier le milieu micromorphe complet de substitution. Ce travail reste encore ouvert.

La notion de VER définie dans ce travail ne permet pas de déterminer les modules effectifs d'ordre supérieur à partir d'un calcul sur une seule cellule élémentaire. C'est un handicap pour appliquer ces méthodes aux techniques EF<sup>2</sup>. Certaines propositions existent dans la littérature, au moins dans le cas linéaire, qui pourront être comparées à la fluctuation "exacte" déterminée dans ce travail.

Une discussion importante a également été ouverte sur le choix du motif de la cellule élémentaire du milieu périodique pour la détermination des propriétés effectives d'ordre supérieur. Une dépendance par rapport à ce choix de cellule élémentaire a été trouvée concernant les modules d'ordre supérieur, en raison des modes de flexion impliquant un tenseur de moment quadratique différent. Ces différences de modules généralisés conduisent

à des prévisions macroscopiques proches sur les calculs de structures considérés dans ce travail. C'est en effet une remarque générale que les corrections apportées dépendent essentiellement de l'ordre de grandeur la longueur caractéristique du milieu définie par exemple comme la racine carrée du rapport entre un module d'ordre supérieur et le module de cisaillement classique. Néanmoins, des travaux ultérieurs sont nécessaires pour savoir s'il est possible de construire une méthode d'homogénéisation généralisées permettant de s'affranchir de la dépendance vis-à-vis du choix du motif de référence, comme c'est le cas en homogénéisation classique.

La validation de la méthode d'homogénéisation proposée a été effectuée en considérant des calculs de référence sur des structures composites à faible nombre d'hétérogénéités comme on les rencontre parfois dans les matériaux architecturés. L'amélioration la meilleure de la prédiction du comportement de la structure à l'aide d'un milieu homogène généralisé de substitution est obtenue quand les modules sont obtenus en prenant en compte la fluctuation "exacte" sur le bord. Les cas considérés ne sont pas suffisamment fins pour trancher sur le milieu continu le mieux adapté pour remplacer telle ou telle microstructure. Toutefois, on a vu les limitations du milieu de Cosserat dans le cas de la relocalisation des déformations lorsqu'un gradient de cisaillement est présent, auquel un milieu du second gradient sera mieux adapté.

L'évaluation des différentes méthodes suggère que la théorie d'homogénéisation aux ordres supérieure n'est pas encore totalement satisfaisante et que plusieurs questions restent ouvertes. Ces techniques sont prometteuses dans la mesure où elles pourront être utilisées dans le cas de comportement non linéaire en plasticité, voire endommagement. Le potentiel de l'approche est élevé, comme prouvé par la qualité et la fiabilité des prédictions présentées. En conséquence, on propose une liste de pas pour avancer dans le développement d'une méthodologie plus systématique de l'homogénéisation d'ordre supérieur :

- Séparer les modes à zéro-énergie dans le développement polynomial pour donner les modules globaux se basant sur le champ de fluctuation convergé ;
- Trouver des conditions aux limites adaptées pour déterminer les modules à partir de calculs sur une seule cellule élémentaire ;
- Se départir de la dépendance du choix de cellule élémentaire ou prendre des arguments convaincants pour choisir la bonne cellule ;
- Définir des conditions aux limites complètes pour déterminer les propriétés globales du milieu micromorphe complet (en particulier en respectant la partie non-symétrique du gradient de micro-déformation, ce qui n'a pas pu être fait ici.) ;
- Donner des règles à déterminer les conditions aux limites supplémentaires pour les milieux globaux homogènes de substitution à partir des conditions aux limites exactes de la structure hétérogène de Cauchy ;
- Mettre en évidence des exemples plus claires pour distinguer le meilleur milieu de substitution pour une microstructure donnée ;
- Prolonger la méthodologie au milieux aléatoires.

Des résultats analytiques récentes confirment que les propriétés effectives peuvent vraiment être déterminées indépendamment de la taille du VER à  $N \times N$  (Bigoni and Drugan, 2007; Pham, 2010; Li, 2011). Toutefois, la dépendance du choix du motif de la cellule élémentaire représentative reste sans solution. Faut-il imaginer des méthodes allant au-delà des développements polynomiaux ? Est-ce que les approches alternatives comme dans (Sansalone et al., 2005) et (Fish and Kuznetsov, 2010) sont plus appropriées que l'approche polynomiale ?

Nous n'avons pas évoqué l'application de conditions aux limites en doubles contraintes imposées. Nous n'avons considéré que des conditions de gradient de déformation ou microdéformation imposées. Des conditions en contraintes ont été proposées par (Rodin,

2007; Li, 2011). Il reste à établir un lien entre les conditions statiques et cinématiques. Les résultats analytiques et éléments finis ont été fournis afin d'illustrer la capacité des théories des milieux généralisés à mieux capturer la réponse globale des structures composites que le milieu Cauchy. Tel est le cas lorsque la structure composite subit quelque gradient macroscopique de déformation qui se développe en raison de la taille non-négligable de l'hétérogénéité par rapport aux dimensions de la structure. Dans le cas du double cisaillement, tous les deux milieux (second-gradient et de Cosserat) sont efficace à capturer la réponse de la structure. Des chargements plus complexes et plus généraux devront être proposés afin d'établir plus clairement la fonction de ces théories.

On voit que plusieurs questions ouvertes restent encore à résoudre avant que l'homogénéisation d'ordre supérieur soit considérée comme une méthode établie. En particulier, on peut souhaiter que le milieu effectif soit proche d'un milieu de Cauchy lorsque le contraste des propriétés élastiques des constituants est petit. C'est le cas des définitions des propriétés élastiques de milieu effectif de Cosserat et du second gradient de déformation proposées par (Bigoni and Drugan, 2007) et (Li, 2011).

De nouvelles microstructures devront être inventées qui font ressortir plus fortement encore l'importance des termes d'ordre supérieur. Des microstructures à base de treillis articulées ont été proposées pour lesquels l'énergie de déformation classique est très faible tandis que l'énergie due aux dérivées d'ordre supérieur devient prépondérante (Alibert et al., 2003).

# Bibliographie

- Alibert J.J., Seppecher P., and Dell’Isola (2003). *Truss Modular Beams with Deformation Energy Depending on Higher Displacement Gradients*. Mathematics and Mechanics of Solids, vol. 8, pp 51–73.
- Altenbach J., Altenbach H., and Eremeyev V.A. (2010). *On generalized Cosserat-type theories of plates and shells : a short review and bibliography*. Arch. Appl. Mech., vol. 80, pp 73–92.
- Amanatidou E. and Aravas A. (2002). *Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, vol. 191, pp 1723–1751.
- Anthoine A. (2010). *Second-order homogenisation of functionally graded materials*. Int. J. Solids Structures, vol. 47, pp 1477–1489.
- Auffray N., Bouchet R., and Bréchet Y. (2009). *Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain-gradient elasticity behavior*. International Journal of Solids and Structures, vol. 46, pp 440–454.
- Auffray N., Bouchet R., and Bréchet Y. (2010). *Strain gradient elastic homogenization of bidimensional cellular media*. International Journal of Solids and Structures, vol. 47, pp 1698–1710.
- Bacigalupo A. and Gambarotta L. (2010). *Second-order computational homogenization of heterogeneous materials with periodic microstructure*. ZAMM, vol. 90, pp 796–811.
- Besdo D. (1985). *Inelastic behaviour of plane frictionless block-systems described as Cosserat media*. Archives of Mechanics, vol. 37, pp 603–619.
- Besdo D. (2010). *Towards a Cosserat-theory describing motion of an originally rectangular structure of blocks*. Arch. Appl. Mech., vol. 80, pp 25–45.
- Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., Forest S., and Blétry M. (2009). *Non-Linear Mechanics of Materials*. Series : Solid Mechanics and Its Applications , Vol. 167 , Springer, ISBN : 978-90-481-3355-0, 433 p.
- Bigoni D. and Drugan W.J. (2007). *Analytical derivation of Cosserat moduli via homogenization of heterogeneous elastic materials*. Journal of Applied Mechanics, vol. 74, pp 741–753.
- Bodner SR. and Partom Y. (1975). *Constitutive equation for elasto-viscoplastic strain-hardening materials*. J. of Applied Mechanics, vol. 42, pp 385–389.
- Bornert M., Bretheau T., and Gilormini P. (2010). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1. Série : Alliages Métalliques*, Hermes Science Publications, ISBN : 2-7462-0199-2.
- Boutin C. (1996a). *Microstructural effects in elastic composites*. Int. J. Solids Structures, vol. 33 n° 7, pp 1023–1053.
- Boutin C. (1996b). *Microstructural effects in elastic composites*. Int. J. Solids Structures, vol. 33, pp 1023–1051.

- Bouyge F., Jasiuk I., Boccara S., and Ostoja-Starzewski M. (2002a). *A micromechanically based couple-stress model of an elastic orthotropic two-phase composite*. Eur. J. Mech., A/Solids, vol. 21, pp 465–481.
- Bouyge F., Jasiuk I., Boccara S., and Ostoja-Starzewski M. (2002b). *A micromechanically based couple-stress model of an elastic orthotropic two-phase composite*. European Journal of Mechanics A/solids, vol. 21, pp 465–481.
- Bouyge F., Jasiuk I., and Ostoja-Starzewski M. (2001a). *A micromechanically based couple-stress model of an elastic two-phase composite*. Int. J. Solids Structures, vol. 38, pp 1721–1735.
- Bouyge F., Jasiuk I., and Ostoja-Starzewski M. (2001b). *A micromechanically based couple-stress model of an elastic two-phase composite*. Int. J. Solids Structures, vol. 38, pp 1721–1735.
- Branke D., Brummund J., Haasemann G., and Ulbricht V. (2009). *Obtaining Cosserat material parameters by homogenization of a Cauchy continuum*. PAMM Proc. Appl. Math. Mech., vol. 9, pp 425–426.
- Bréchet Y. and Ashby M.F. (2003). *Designing hybrid materials*. Acta Mat., vol. 51, pp 5801–5821.
- Chen H., Liu X., Hu G., and Yuan H. (2009). *Identification of material parameters of micropolar theory for composites by homogenization method*. Computational Materials Science, vol. 46, pp 733–737.
- Cosserat E. and Cosserat F. (1909). *Théorie des corps déformables*. Hermann, Paris.
- De Bellis M. L. and Addessi D. ((in press) 2010). *A Cosserat based multi-scale model for masonry structures*. International Journal of Multiscale Computational Engineering.
- Dillard T., Forest S., and Ienny P. (2006). *Micromorphic continuum modelling of the deformation and fracture behaviour of nickel foams*. European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 25, pp 526–549.
- Ebinger T., Steeb H., and Diebels S. (2005). *Modeling macroscopic extended continua with the aid of numerical homogenization schemes*. Computational Materials Science, vol. 32, pp 337–347.
- Enakoutsa K. and Leblond J.B. (2009). *Numerical implementation and assessment of the GLPD micromorphic model of ductile rupture*. European Journal of Mechanics A/solids, vol. 28, pp 445–460.
- Eringen A.C. and Suhubi E.S. (1964). *Nonlinear theory of simple microelastic solids*. Int. J. Engng Sci., vol. 2, pp 189–203, 389–404.
- Feyel F. (2003). *A multilevel finite element method (FE<sup>2</sup>) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, vol. 192, pp 3233–3244.
- Fish J. and Kuznetsov S. (2010). *Computational Continua*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 84, pp 774–802.
- Forest S. (1998). *Mechanics of Generalized Continua : Construction by Homogenization*. Journal de Physique IV, vol. 8, pp Pr4–39–48.
- Forest S. (1999). *Aufbau und Identifikation von Stoffgleichungen für höhere Kontinua mittels Homogenisierungsmethoden*. Technische Mechanik, vol. Band 19, Heft 4, pp 297–306.
- Forest S. (2002). *Homogenization methods and the mechanics of generalized continua—Part 2*. Theoretical and Applied Mechanics, vol. 28–29, pp 113–143.



- Forest S. (2009). *The micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity and damage*. ASCE Journal of Engineering Mechanics, vol. 135, pp 117–131.
- Forest S., Pradel F., and Sab K. (2001). *Asymptotic analysis of heterogeneous Cosserat media*. International Journal of Solids and Structures, vol. 38, pp 4585–4608.
- Forest S. and Sab K. (1998a). *Cosserat Overall Modeling of Heterogeneous Materials*. Mechanics Research Communications, vol. 25 n° 4, pp 449–454.
- Forest S. and Sab K. (1998b). *Cosserat overall modeling of heterogeneous materials*. Mechanics Research Communication, vol. 25, pp 449–454.
- Forest S. and Sievert R. (2003). *Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua*. Acta Mechanica, vol. 160, pp 71–111.
- Forest S. and Sievert R. (2006). *Nonlinear microstrain theories*. International Journal of Solids and Structures, vol. 43, pp 7224–7245.
- Forest S. and Trinh D. K. (2011). *Generalized continua and non-homogeneous boundary conditions in homogenization methods*. ZAMM, vol. 91, pp 90–109.
- Geers M.G.D., Kouznetsova V.G., and Brekelmans W.A.M (2001). *Gradient-enhanced computational homogenization for the micro-macro scale transition*. Journal de Physique IV, vol. 11, pp Pr5–145–152.
- Germain P. (1973). *The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2 : Microstructure*. SIAM J. Appl. Math., vol. 25, pp 556–575.
- Goddard J.D. (2008). *Mathematical models of granular matter*, ed. by P. Mariano, G. Capriz, and P. Giovine, chapter From Granular Matter to Generalized Continuum, pp 1–20. vol. 1937 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin.
- Gologanu M., Leblond J.B., and Devaux J. (1997). *Continuum micromechanics*, vol. 377, chapter Recent extensions of Gurson’s model for porous ductile metals, pp 61–130. Springer Verlag, CISM Courses and Lectures No. 377.
- Grammenoudis P. and Tsakmakis Ch. (2009). *Micromorphic continuum Part I : Strain and stress tensors and their associated rates*. International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 44, pp 943–956.
- Grammenoudis P., Tsakmakis Ch., and Hofer D. (2009). *Micromorphic continuum Part II : Finite deformation plasticity coupled with damage*. International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 44, pp 957–974.
- Haboussi M., Dumontet H., and Billoët J. (2001). *On the modelling of interfacial transition behaviour in composite materials*. Computational Materials Science, vol. 20, pp 251–266.
- Hirschberger C.B. and Steinmann P. (2009). *Classification of Concepts in Thermodynamically Consistent Generalized Plasticity*. ASCE Journal of Engineering Mechanics, vol. 135, pp 156–170.
- Jänicke R. (2010). *Micromorphic media : Interpretation by homogenisation*. PhD-thesis (<http://scidok.sulb.uni-saarland.de/volltexte/2010/3209>), Saarbrücker Reihe Materialwissenschaft und Werkstofftechnik, Band 21. Shaker Verlag, Aachen.
- Jänicke R. and Diebels (2009). *A numerical homogenisation strategy for micromorphic continua*. Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica C-Geophysics and Space Physics, vol. 32, pp 121–132.
- Jänicke R., Diebels S., Sehlhorst H.-G., and Düster A. (2009). *Two-scale modelling of micromorphic continua*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, vol. 21, pp 297–315.

- Jänike R. and Diebels (2009). *a numerical homogenisation strategy for micromorphic continua*. IL NUOVO CIMENTO - Colloquia :GCM8, vol. 32 n° 1, pp 121–132.
- Kaczmarczyk L., Pearce C.J., and Bicanic N. (2008). *Scale transition and enforcement of RVE boundary conditions in second-order computational homogenization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 74, pp 506–522.
- Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., and Jeulin D. (2003). *Determination of the size of the Representative Volume Element for random composites : statistical and numerical approach*. International Journal of Solids and Structures, vol. 40, pp 3647–3679.
- Kanit T., Nguyen F., Forest S., Jeulin D., Reed M., and Singleton S. (2006). *Apparent and effective physical properties of heterogeneous materials : representativity of samples of two materials from food industry*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195, pp 3960–3982.
- Kouznetsova V., Geers M. G. C., and Brekelmans W. A. M. (2004a). *Size of a RVE in a second order computational homogenization framework*. International Journal for Multiscale Computational Engineering, vol. 2, pp 575–598.
- Kouznetsova V., Geers M. G. D., and Brekelmans W. A. M. (2002a). *Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme*. Int. J. Numer. Meth. Engng, vol. 54, pp 1235–1260.
- Kouznetsova V. G., Geers M. G. D., and Brekelmans W. A. M. (2002b). *Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme*. Int. J. Numer. Meth. Engng, vol. 54, pp 1235–1260.
- Kouznetsova V. G., Geers M. G. D., and Brekelmans W. A. M. (2004b). *Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, vol. 193, pp 5525–5550.
- Kouznetsova V. G., Geers M. G. D., and Brekelmans W. A. M. (2004c). *Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : A nested finite element solution strategy*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 193, pp 5525–5550.
- Kromm FX., Quenisset JM., Harry R., and Lorriot T. (2002). *An example of multimaterial design*. Advanced Engineering Materials, vol. 4, pp 371–4.
- Kruch S. (2007). *Homogenized and relocated mechanical fields*. Journal of Strain Analysis for Engineering Design, vol. 42, pp 215–226.
- Kruch S. and Forest S. (1998). *Computation of Coarse Grain Structures Using a Homogeneous Equivalent Medium*. Journal de Physique IV, vol. 8, pp Pr8–197–205.
- Larsson R. and Diebels S. (2007). *A second-order homogenization procedure for multi-scale analysis based on micropolar kinematics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 69, pp 2485–2512.
- Li J. (2011). *Establishment of strain gradient constitutive relations by homogenization*. Comptes Rendus Mécanique, vol. 339, pp 235–244.
- Liu X. and Hu G. (2003). *Inclusion problem of microstretch continuum*. International Journal of Engineering Science, vol. 42, pp 849–860.
- Masiani R. and Trovalusci P. (1996). *Cosserat and Cauchy materials as continuum models of brick masonry*. Meccanica, vol. 31, pp 421–432.
- Mei C.C., Auriault J.L., and Ng C.O. (1996). *Some applications of the homogenization theory*. Advances in Applied Mechanics, vol. 32, pp 277–348.

- Mindlin R.D. (1964). *Micro-structure in linear elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 16, pp 51–78.
- Mindlin R.D. and Eshel N.N. (1968). *On first strain gradient theories in linear elasticity*. Int. J. Solids Structures, vol. 4, pp 109–124.
- Mühlich U., Zymbell L., and Kuna M. (2009). *Micromechanical modelling of size effects in failure of porous elastic solids using first order plane strain gradient elasticity*. Computational Materials Science, vol. 46, pp 647–653.
- Neff P. and Forest S. (2007). *A geometrically exact micromorphic model for elastic metallic foams accounting for affine microstructure. Modelling, existence of minimizers, identification of moduli and computational results*. Journal of Elasticity, vol. 87, pp 239–276.
- Nowacki W. (1986). *Theory of asymmetric elasticity*. Pergamon.
- Ostoja-Starzewski M., Boccara S. D., and Jasiuk I. (1999a). *Couple-stress moduli and characteristic length of two-phase composite*. Mechanics Research Communication, vol. 26, pp 387–396.
- Ostoja-Starzewski M., Boccara S. D., and Jasiuk I. (1999b). *Couple-stress moduli and characteristic length of two-phase composite*. Mechanics Research Communication, vol. 26, pp 387–396.
- Ostoja-Starzewski M. and Jasiuk I. (1995). Proc. Roy. Soc. Lond., pp 451–453.
- Pham T. T. T. (2010). *Un modèle d'endommagement à gradient de déformation à partir de la méthode d'homogénéisation pour les matériaux fragiles*. Phd thesis, Université Paris XIII.
- Regueiro R.A. (2010). *On finite strain micromorphic elastoplasticity*. International Journal of Solids and Structures, vol. 47, pp 786–800.
- Rodin G. J. (2007). *Higher-order microscopic measures*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 55, pp 1103–1119.
- Salerno G. and de Felice F. (2009). *Continuum modeling of periodic brickwork*. International Journal of Solids and Structures, vol. 46, pp 1251–1267.
- Sanchez-Palencia E. and Zaoui A. (1987). *Homogenization techniques for composite media*. Lecture Notes in Physics No. 272, Springer, Berlin.
- Sansalone V., Trovalusci P., and Cleri F. (2005). *Multiscale modeling of composite materials by a multifield finite element approach*. International Journal of Multiscale Computational Engineering, vol. 3, pp 463–480.
- Sansalone V., Trovalusci P., and Cleri F. (2006). *Multiscale modeling of materials by a multifield approach : microscopic stress and strain distribution in fiber-matrix composites*. Acta Materialia, vol. 54, pp 3485–3492.
- Sansour C., Skatulla S., and Zbib H. (2010). *A formulation for the micromorphic continuum at finite inelastic strains*. Int. J. Solids Structures, vol. 47, pp 1546–1554.
- Tekoglu C. and Onck P. R. (2008). *Size effects in two-dimensional Voronoi foams : A comparison between generalized continua and discrete models*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 56, pp 3541–3564.
- Terada K., Hori M., Kyoya T., and N. Kikuchi (2000). *Simulation of multi-scale convergence in computational homogenization approach*. Int. J. Solids Structures, vol. 37, pp 2285–2311.
- Triantafyllidis N. and Bardenhagen S. (1996). *The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 44, pp 1891–1928.

- Trinh D. K., Jänicke R., Auffray N., Diebels S., and Forest S. (2011). *Evaluation of generalized continuum substitution models for heterogeneous materials*. International Journal of Multiscale Computational Engineering, accepted, vol. .
- Trinh K. D. and Forest S. (2010). *The role of the fluctuation field in higher order homogenization*. PAMM Proc. Appl. Math. Mech., vol. 10, pp 431–432.
- Trovalusci P. and Masiani R. (2003). *Non-linear micropolar and classical continua for anisotropic discontinuous materials*. Int. J. Solids Structures, vol. 48, pp 1281–1297.
- van der Sluis O., Schreurs PJG., Brekelmans WAM., and Meijer HEH. (2000). *Overall behaviour of heterogeneous elastoviscoplastic materials : effects of microstructural modelling*. Mechanics of Materials, vol. 32, pp 449–462.
- Xun F., Hu G., and Huang Z. (2004). *Size-dependence of overall in-plane plasticity for fiber composites*. International Journal of Solids and Structures, vol. 41, pp 4713–4730.
- Yuan X., Tomita Y., and Andou T. (2008). *A micromechanical approach of nonlocal modeling for media with periodic microstructures*. Mechanics Research Communications, vol. 35, pp 126–133.
- Zybell L., Mühlich U., and Kuna M. (2009). *Constitutive equations for porous plane-strain gradient elasticity obtained by homogenization*. Arch. Appl. Mech., vol. 79, pp 359–375.

# Méthodes d'homogénéisation d'ordre supérieur pour les matériaux architecturés

## Résumé :

L'homogénéisation classique par un milieu de Cauchy a rencontré de nombreux succès dans l'étude des matériaux hétérogènes. Elle connaît toutefois des limitations lorsque le chargement macroscopique appliqué varie sur des longueurs qui sont de l'ordre de la taille des hétérogénéités en présence. L'objectif de l'homogénéisation par des milieux continus généralisés est de remédier à ces limitations et d'étendre la validité de l'approche continue au-delà de l'hypothèse stricte de séparation des échelles.

Il y a beaucoup d'avancements pendant les dix dernières années dans le même domaine de recherche. Les contributions développent essentiellement la modélisation multi-échelle des matériaux par le modèle du milieu de Cosserat (ou milieu micropolaire), du milieu du second-gradient, du milieu à couples de contraintes et récemment du milieu micromorphe. La modélisation multi-échelle est réalisée par plusieurs méthodes : soit avec le calcul numérique des moyennes sur un VER, soit avec la méthode asymptotique, soit par des méthodes plus empiriques.

Ma contribution suit la technique de calcul des moyennes de champs locaux, avec l'intention de chercher une méthode qui n'est pas trop lourde mais systématique pour modéliser les matériaux composites par un milieu continu généralisé. La motivation de cette méthode est sa bonne capacité d'appliquer à toute micro-structure, et aussi son application relativement simple au comportement non-linéaire (comportement élasto-plastique).

**Mots clés :** Matériaux architecturés, homogénéisation d'ordre supérieur, milieux généralisés.

## Higher order homogenization for architected materials

### Abstract:

Standard homogenization with Cauchy medium has got many successes in heterogeneous material study. However, it is limited when characterised length of applied macroscopic loadings is at the same order of material's heterogeneity; in particular in case of grand gradient solicitation, for instance in sandwich bending case. The homogenization with generalized media is then necessary to overcome these limits and extend the validation of homogenization approach out of strict condition of scale separation.

There is recently much progression in this domain; contributions develop mainly multi-scale modelling by Cosserat/micropolar medium, by second gradient medium, by couple-stress medium and recently by micromorphic continuum. There are also many methods for multi-scale modelling : computational average on RVE, asymptotic development method or empirical methods.

My contribution follows the local fields average technique, for purpose of looking for a new method which is not so complicated but systematically enough for modelling composite material by generalized media. Motivation of this method is its good applicability to any micro-structure, and also relatively simple for applying in non-linear behavior (elasto-plastic behavior).

**Keywords:** Architected material, higher order homogenization, generalized media.

